



UNIVERSITA' degli STUDI di ROMA
TOR VERGATA

Dipartimento di Ingegneria Elettronica
Ingegneria del Suono

Tesina per il corso di
"COMPONENTI E SISTEMI ELETTROACUSTICI"
Prof. Marco Re

ALGORITMI PER L'ACCORDATURA DEL PIANOFORTE



Simone Renzi
Matr. 0197140

UNIVERSITÀ DI TOR VERGATA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRONICA

Tesina per il corso di
“COMPONENTI E SISTEMI ELETTROACUSTICI”
Prof. Marco Re

a cura di **Simone Renzi**

In questa tesi si tenterà di sviluppare un’analisi utile alla caratterizzazione di algoritmi per l’accordatura del pianoforte, illustrando non solo le peculiarità mirate alla descrizione dell’enunciato che abbiamo prestabilito ma concedendo anche una sommaria visione d’insieme sulla tecnologia del pianoforte, facendo riferimento alle leggi fisiche che lo governano e non dimenticando l’importante ruolo che gioca la scienza psico-acustica nel descrivere alcuni comportamenti nel dominio percettivo dell’essere umano.

L’intento, è quindi quello di gettare le basi per la formalizzazione di una possibile futura tesi di laurea nella quale si analizzi un percorso completo che esponga con estrema finitezza tutti i possibili utilizzi del pianoforte nei domini acustico, analogico e digitale. Soprattutto in campo digitale, sarà argomento centrale, l’implementazione di un software di accordatura e successiva realizzazione di una libreria di suoni campionati.

SOMMARIO

Prefazione – p.3

Capitolo I: Il pianoforte – p. 4

Il clavicembalo: 4

Il fortepiano di Silbermann dall'invenzione di Cristofori :5

André Stein ed il pianoforte: 6

Capitolo II: Il suono e la frequenza – p. 8

Il suono: 8

Frequenza e pendolo semplice: 9

Relazioni fondamentali: pulsazione, frequenza, periodo: 16

Comportamenti non lineari in frequenza dell'orecchio umano: 17

Capitolo III: L'accordatura – p. 19

Riferimenti tonali: 19

Perdita di accordatura: 20

Sistemi di accordatura storici e sistema temperato: 23

Capitolo IV: Importanza della banda critica e battimenti – p. 24

Banda critica: 24

Frequenza media e battimenti: 25

Simulazioni Matlab: 26

Capitolo V: Disarmonicità – p. 29

Concetto di armonica: 29

Calcolo della disarmonicità: metodo teorico, metodo empirico: 30

Simulazioni Matlab: 33

Capitolo VI: Nozioni di teoria musicale: intervalli – p. 37

La tastiera del pianoforte e la notazione musicale:

Scale e tonalità:

Intervalli:

Capitolo VII: Algoritmi per l'accordatura – p. 42

Accordatura ad orecchio: 36

Algoritmi di emulazione dell'accordatura ad orecchio: 37

Simulazioni Matlab: 42

Conclusioni – p. 54

P r e f a z i o n e

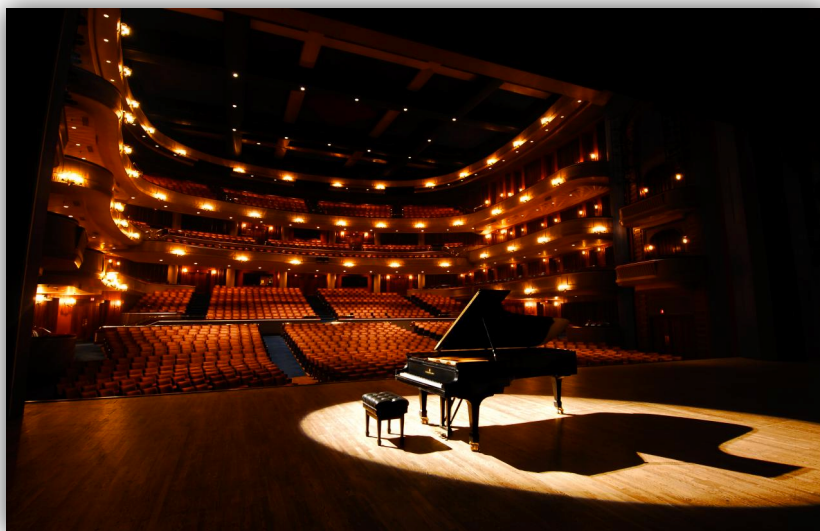
Prima di entrare nel vivo della tesina credo sia d'obbligo argomentare alcune mie scelte.

I miei interessi in ambito scientifico, ingegneristico e musicale, mi hanno portato a compiere un lavoro di ricerca che mi arricchisse dal punto di vista conoscitivo e che fosse anche argomento d'interesse per tutti quelli che, come me, nutrono la passione per il pianoforte e per tutte le applicazioni che da esso derivano. Inoltre spero che negli anni a seguire, altri studenti possano riutilizzare questo mio elaborato per le loro ricerche in campo elettro-acustico, anche ampliando il panorama teorico qui trattato, ove per questioni di tempo o di mie mancanze, risulti incompleto.

Affinché questa tesina sia fruibile da qualsiasi lettore, è necessario dare una visione, seppur sommaria dei vari argomenti, spesso appartenenti a diverse branche della scienza, che via via introdurrò. I paragrafi più tecnici, nei quali si renda necessario un massiccio utilizzo della matematica, saranno contrassegnati con il simbolo $\square$ e colorati di uno sfondo grigio chiaro. Tuttavia, qualora il lettore **non** avesse grande dimestichezza con la matematica, potrà saltare questi paragrafi, avendo comunque una visione discorsiva dei punti che man mano andrò ad affrontare.

Capitolo 1

Il Pianoforte



Ritengo sia di fondamentale importanza al fine di affrontare questo tipo di studio, non prescindere dalle origini del pianoforte, raccontando per sommi capi, come è nato e come negli anni è andato ad evolversi fino al presente.

Il pianoforte come lo conosciamo oggi, che in questa foto domina una spettacolare hall da concerto, viene da una storia di circa 300 anni. Il primo modello di pianoforte fu infatti messo a punto da Bartolomeo Cristofori¹ nel 1698, il quale gli diede l'appellativo di “gravicembalo col piano e forte” poi rinominato cento anni dopo, ovvero alla fine del ‘700 “fortepiano”. Il pianoforte nasce quindi come estensione del clavicembalo, il quale non aveva possibilità di sfumatura dinamica, giacché il suono era prodotto da alcune tangenti alle corde,

¹ Bartolomeo Cristofori (Padova, 4 Maggio 1655 – Firenze, 27 Gennaio 1732) è stato un artigiano italiano, costruttore di clavicembali e di altri strumenti a tastiera. – Fonte wikipedia.org

che oggi conosciamo con il nome di “plettri”, i quali, azionando la meccanica di trasmissione di un tasto andavano a pizzicare la corda mettendola in vibrazione. Nonostante il clavicembalo fosse uno strumento immancabile all'interno dei salotti dell'alta società, esso aveva scarse possibilità espressive, tempi d'inviluppo² del suono notevolmente brevi e una potenza sonora che difficilmente gli permetteva di essere facilmente ascoltabile in fondo ad una sala da concerto. Il suono del clavicembalo è comunque molto ricco di armonici, in numero molto più grande di quelli generati dal pianoforte; per alcuni versi questa caratteristica, è un suo grosso punto a favore, per altri rappresenta grossi svantaggi.

Tornando al fortepiano, questo era pensato come il clavicembalo ma differiva nella meccanica di trasmissione che consisteva in un sistema di leve al termine delle quali era posto un martello feltrato, il quale colpendo la corda con una certa forza doveva produrre un suono d'intensità commisurata alla forza applicata dal musicista sulla prima leva (quella del tasto). L'idea era senz'altro molto promettente ma purtroppo non erano ancora state



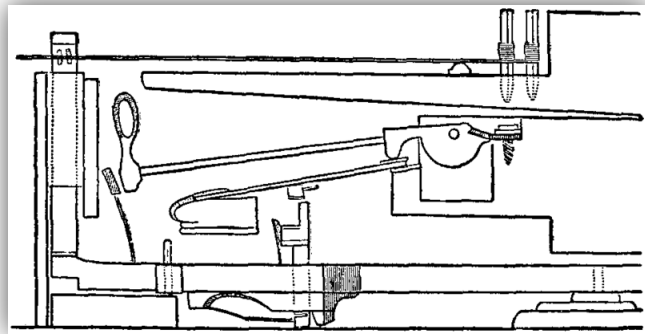
scoperte le leggi fisiche alla base della produzione degli armonici che saranno argomento di studio per la prima volta con Thomas Young nel 1801. Il suono prodotto da questo nuovo strumento era quindi molto duro, al limite dell'ascoltabilità, tanto che Gottfried Silbermann, costruttore di organi tedesco, nel 1726 riprese l'idea di Bartolomeo Cristofori costruendo un forte piano che venne successivamente sottoposto al parere di Johann Sebastian Bach. Bach

² Il tempo di inviluppo è il tempo necessario al completamento delle fasi ADSR (Attack Decay Sustain Release). Un tempo di inviluppo molto piccolo indica un suono che si estingue molto velocemente.

criticò il suono che riteneva molto povero ed il tocco della tastiera molto pesante. Silbermann perfezionò il suo strumento e Bach questa volta diede la sua approvazione.

Bach infatti, incontrò nuovamente il fortepiano di Silbermann quando nel 1747 andò in visita al Re di Prussia Federico II al palazzo di Potsdam. In questa occasione

Bach improvvisò sul fortepiano di Silbermann un meraviglioso “Ricercare a 3 voci” che colse lo stupore di Federico II e che presagiva le immense possibilità di quello strumento. Come curiosità, Bach scrisse il “Clavicembalo



Particolare della meccanica del fortepiano di Bartolomeo Cristofori

ben temperato” (una raccolta di preludi e fughe in tutte le tonalità) Für Klavier, che tradotto significa “per strumenti a tastiera” e non “per clavicembalo” come molti erroneamente sostengono, al fine di promuovere la novità del sistema di accordatura temperato equabile.

Risolte in parte le problematiche a livello sonoro di questo nuovo astro nascente nel panorama degli strumenti musicali, c'erano ancora altri problemi di natura meccanica. La tastiera era più pesante di quella del clavicembalo (notoriamente più agile nei virtuosismi) ed alcuni abbellimenti tipici della musica barocca erano praticamente insuonabili su una tastiera così pastosa.

André Stein, formatosi presso la bottega di Silbermann, risolse il problema dotando la meccanica del fortepiano di smorzatori per le corde e di un sistema di

scappamento che permetteva alla tastiera di essere più pronta e veloce nei virtuosismi. Nel 1777 Stein ricevette la visita di Wolfgang Amadeus Mozart che rimase molto colpito da questa nuova revisione, e ne intuì immediatamente la strada che negli anni a seguire avrebbe compiuto.

Agli albori dell'800 le scoperte in ambito scientifico che andremo ad analizzare portarono alla costruzione del moderno pianoforte, grazie alla lavorazione di meccaniche e corde che permettevano di ottenere degli strumenti con curve di inviluppo molto più lente che si concretizzava in un suono più prolungato, ricco di armonici “giusti” e potente, facendo anche affidamento ad una tastiera che apriva la strada e dava il benvenuto al pianista virtuoso: figura preponderante a partire dall'ottocento fino ad oggi.

Capitolo 2

Il suono e la frequenza

Dovrebbe essere chiaro che tutti gli strumenti a corda, così come altri tipi di strumenti in cui la frequenza propria di un suono è ottenuta per mezzo di un elemento posto ad una certa trazione, hanno bisogno di essere accordati a frequenze ben determinate.

Accordare uno strumento significa portare le frequenze che caratterizzano le singole note dello stesso, ad essere confrontabili con un sistema matematico di riferimento ovvero un sistema di accordatura. Non mi dilungherò molto sui sistemi di accordatura perché mi preme molto di più soffermarmi sulle motivazioni fisiche di effettuare l'accordatura. Per ovvi motivi un organo si accorderà diversamente da un pianoforte. In generale i cordofoni³ si accordano regolando la tensione delle corde, applicando una forza su una caviglia sulla quale è avvolta l'estremità di una corda. La caviglia nel pianoforte è il medesimo concetto della meccanica delle chiavi nella chitarra tanto per portare un esempio.

La caviglia è un particolare componente del pianoforte in acciaio temperato a base quadrata, forato nella parte superiore al fine di permettere l'inserimento della corda sul quale viene avvolta. Si inserisce con particolari tecniche all'interno di un multistrato in legno denominato "somiere" che gli conferisce la libertà di poter ruotare su sé stessa ma con una certa resistenza imposta dallo stesso al fine di garantire una buona **tenuta** dell'accordatura.

Più volte in questa trattazione abbiamo parlato di suono e frequenza ma non abbiamo ancora definito cosa siano. Prima di addentrarci in questi concetti è bene farlo:

³ Classe di tutti gli strumenti a corda

- Il suono è fisicamente una perturbazione meccanica che si propaga attraverso un mezzo elastico, tipicamente nella vita di tutti i giorni tale mezzo è l'aria.
- La frequenza è **una** delle caratteristiche che classificano un suono, ovvero, è quella grandezza la cui variazione a livello percettivo ci fa dire se un suono è più acuto o più grave di un altro.

Per spiegare cosa sia un suono è necessario introdurre il più semplice dei suoni: la sinusoide. In natura qualsiasi cosa che si muova di moto armonico tende a descrivere un comportamento sinusoidale. Se decidiamo di muoverci lungo un segmento in avanti e indietro dovremo accelerare, giunti al termine del segmento rallentare e voltarci per cambiare direzione riaccelerando per ripercorrere lo stesso percorso. Se decidessimo di graficare questo andamento in funzione del tempo otterremmo proprio una funzione sinusoidale.

☑ I metodi migliori per descrivere una sinusoidale pura sono per mezzo dello studio della costante elastica di una molla (legge di Hooke) e del pendolo (moto armonico semplice se non consideriamo attriti, e moto armonico smorzato se consideriamo gli attriti – caso reale).

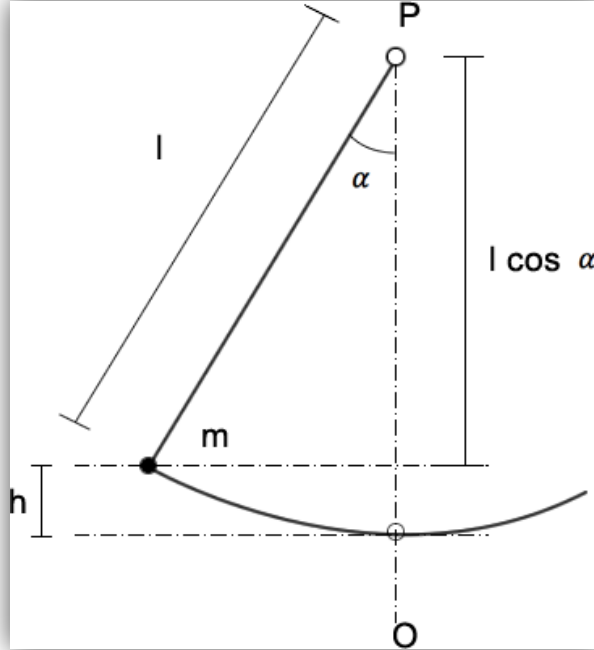
Prendiamo il caso del pendolo semplice.

Come già accennato il caso del pendolo semplice è un caso ideale in cui si possano trascurare gli attriti. Nella realtà questo non sarebbe possibile, infatti, nel caso reale assistiamo a quello che prende il nome di moto armonico smorzato ed anche il suono negli strumenti a percussione rientra in questa ipotesi.

Nella figura poniamo m la massa del pendolo, l la lunghezza del pendolo, α_0 la posizione angolare al tempo $t = 0$, α_{max} l'angolo massimo raggiunto dall'oscillazione.

Ci poniamo nel caso in cui l'oscillazione sia molto piccola, in questo modo, i calcoli matematici saranno meno complicati e sarà

anche possibile verificare, per intervalli di tempo molto piccoli, experimentalmente la teoria.



Muovendo il pendolo in una posizione α_0 e lasciandolo libero di muoversi al tempo $t = 0$, il sistema comincia ad oscillare per effetto della gravità che agisce sulla massa m . Vogliamo trovare la legge oraria che descriva il moto del pendolo semplice attraverso la legge di conservazione dell'energia:

$$E_{TOT} = E_P + E_K$$

L'energia totale in un sistema fisico isolato si conserva ed è uguale in questo caso, alla somma della sua energia potenziale e della sua energia cinetica.

Qualsiasi oggetto avente una massa m portato ad una quota h possiede una sua energia potenziale E_P . L'energia potenziale è l'energia che potenzialmente

possiede un corpo per poter compiere lavoro nel caso in cui sia rimosso il vincolo che lo tiene alla quota h .

$$E_P = mgh$$

Dalla figura possiamo trovare la quota h nei confronti dei termini in l .

$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$$

Riprendendo la formula dell'energia potenziale possiamo sostituire la quota h con la quota appena trovata espressa nei confronti di l ottenendo:

$$E_P = mgl(1 - \cos \alpha)$$

Ci ricordiamo che stiamo considerando oscillazioni molto piccole al fine di avvicinarci entro un certo intervallo di tempo al caso reale pertanto possiamo utilizzare i metodi dello sviluppo in serie di Taylor⁴ per approssimare la funzione trigonometrica coseno ad una funzione espressa in soli radianti fermandoci ai primi termini della serie:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$$

Riprendendo la formula dell'energia potenziale andiamo a sostituire il valore del coseno con il suo valore approssimato ai primi due termini della serie.

⁴ Lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}$

$$E_P = mgl \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] = \frac{mgl\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}mgl\alpha^2$$

Troviamo adesso l'energia cinetica del pendolo:

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

ricordando che $v = \frac{ds}{dt}$ e che nel nostro sistema stiamo considerando un angolo e non uno spazio lineare, quindi $ds = d(l\alpha)$ possiamo scrivere:

$$E_K = \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{d(l\alpha)}{dt} \right)^2$$

La lunghezza è costante e può essere portata fuori dall'operatore di derivata:

$$E_K = \frac{1}{2}m \left(l \frac{d(\alpha)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d(\alpha)}{dt} \right)^2$$

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia pertanto:

$$E_{TOT} = E_P + E_K = \frac{1}{2}mgl\alpha^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d(\alpha)}{dt} \right)^2$$

Ora possiamo fare alcune considerazioni sui casi estremi ovvero quando il pendolo ha velocità massima e quando ha velocità nulla.

Nel caso in cui il pendolo possieda velocità massima la sua energia cinetica sarà massima e l'energia potenziale sarà nulla. Questa condizione avviene nell'istante di tempo in cui il pendolo è perfettamente perpendicolare al suolo, poiché le

componenti della forza peso che agiscono sulla massa del pendolo accelerano positivamente il sistema subito dopo che il pendolo ha raggiunto la quota massima, ed accelerano negativamente il sistema nel momento in cui viene sorpassato l'asse ortogonale immaginario che congiunge il punto P con il punto O.

L'altro caso (più interessante del primo e di più facile comprensione) è valutare quando la velocità della massa del pendolo è nulla. La velocità sarà ovviamente nulla nel momento in cui il pendolo ha raggiunto ampiezza massima. Ma se la velocità è nulla allora è nulla anche l'energia cinetica e quindi l'energia totale del sistema è data solamente dalla componente potenziale. Pertanto:

$$\frac{1}{2}mgl\alpha_{max}^2 = \frac{1}{2}mgl\alpha^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

L'unica incognita presente all'interno della precedente relazione è la derivata dell'angolo α , quindi cerchiamo di esplicitare $d\alpha$ tramite operazioni algebriche.

$$\frac{1}{2}mgl\alpha_{max}^2 = \frac{1}{2}mgl\alpha^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 ;$$

$$\frac{1}{2}mgl\alpha_{max}^2 - \frac{1}{2}mgl\alpha^2 - \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0;$$

L'unico termine mancante nella precedente relazione per poter mettere a fattor comune $\frac{1}{2}mgl$ è proprio g , pertanto moltiplichiamo e dividiamo il terzo termine per g ottenendo:

$$\frac{1}{2}mgl\alpha_{max}^2 - \frac{1}{2}mgl\alpha^2 - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0;$$

$$\frac{1}{2}mgl\left[\alpha_{max}^2 - \alpha^2 - \frac{l}{g}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right] = 0;$$

$$\alpha_{max}^2 - \alpha^2 - \frac{l}{g}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0;$$

$$\frac{l}{g}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \alpha_{max}^2 - \alpha^2;$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\alpha_{max}^2 - \alpha^2);$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}(\alpha_{max}^2 - \alpha^2)};$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\alpha_{max}^2 - \alpha^2};$$

Siamo nel caso di un'equazione differenziale del primo ordine che possiamo risolvere facilmente isolando le variabili in α .

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_{max}^2 - \alpha^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt;$$

Integrando a sinistra e destra:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{max}^2 - \alpha^2}} d\alpha = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l}} dt$$

$$\left[\arcsin \frac{\alpha}{\alpha_{max}} \right]_{\alpha_0}^{\alpha} = \left[\sqrt{\frac{g}{l}} t \right]_0^t$$

$$\arcsin \frac{\alpha}{\alpha_{max}} - \arcsin \frac{\alpha_0}{\alpha_{max}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t - \sqrt{\frac{g}{l}} 0$$

Poniamo $\arcsin \frac{\alpha_0}{\alpha_{max}} = \varphi$ pertanto la precedente relazione diventa:

$$\arcsin \frac{\alpha}{\alpha_{max}} - \varphi = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$\arcsin \frac{\alpha}{\alpha_{max}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi$$

Applichiamo l'operazione inversa dell'arcsin ad entrambe i membri dell'uguaglianza per esplicitare tutto nei confronti di α .

$$\sin \left[\arcsin \frac{\alpha}{\alpha_{max}} \right] = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi \right)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_{max}} = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi \right)$$

$$\alpha = \alpha_{max} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi \right)$$

Poiché $\sqrt{\frac{g}{l}}$ esprime la frequenza angolare, possiamo riscrivere quest'ultima relazione in modo ancora più essenziale:

$$\alpha = \alpha_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

dove α_{max} è l'ampiezza massima, ω è la pulsazione e φ è lo sfasamento. Da questa relazione possiamo ricavare le grandezze: pulsazione, frequenza, periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

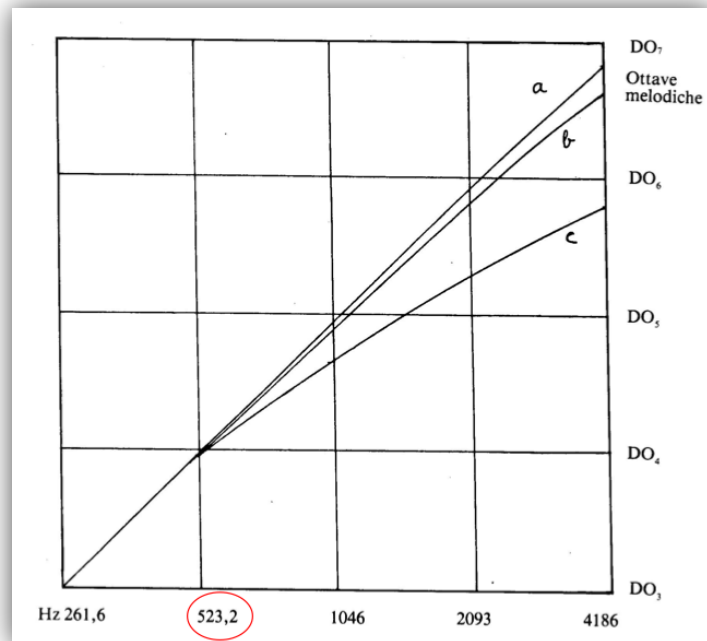
Come possiamo notare, pulsazione, frequenza e periodo **non** dipendono dalla massa **m**.

Ai fini della caratterizzazione di un algoritmo per l'accordatura del pianoforte si renderà necessaria solamente la frequenza, ovvero quella grandezza fisica che il musicista chiama "altezza".

La frequenza è la variabile più immediata in senso psicoacustico ed importante a livello percettivo, quando si parla di suono; non a caso il primo approccio al suono nei bambini è relativo proprio all'altezza dei suoni e dunque alle note.

In questo lavoro, si cercherà di caratterizzare un algoritmo che imiti il comportamento dell'orecchio umano, ed in particolare, che cerchi di emulare l'orecchio dell'accordatore. Nella tabella sottostante è raffigurato il comportamento dell'orecchio umano nel riportare le ottave successive⁵.

⁵ Per ottave successive si intendono fisicamente i successivi prodotti per scalari derivanti della frequenza fondamentale. Psicoacusticamente la sensazione di altezza doppia, tripla, ecc. si traduce in un grafico che non è lineare così come mostrato in tabella.



La curva **c**, rappresenta il comportamento dell'orecchio di una persona comune, la curva **b** rappresenta il comportamento dell'orecchio di un musicista, la curva **a** rappresenta il comportamento dell'orecchio di un accordatore. Come possiamo vedere l'orecchio si comporta in modo lineare fino ad una frequenza di circa 520 Hz, poi comincia a calare in frequenza. Ciò indica che nonostante la realtà fisica sia lineare, il comportamento psicoacustico varia di persona in persona, pertanto per ottenere un risultato psichico di tipo lineare dovremo distorcere la linearità fisica.

L'algoritmo che andremo a caratterizzare dovrà tener conto di queste curve man mano che si salirà in frequenza.

E' interessante notare che ai fini dell'accordatura, essendo la stessa definibile come "lo stabilimento dei 'giusti' rapporti armonici" (definiremo in seguito cosa

intendiamo per giusti), è inutile considerare variabili come l'ampiezza (entro il limite della soglia udibile s'intende), e la fase.

Capitolo 3

L' accordatura

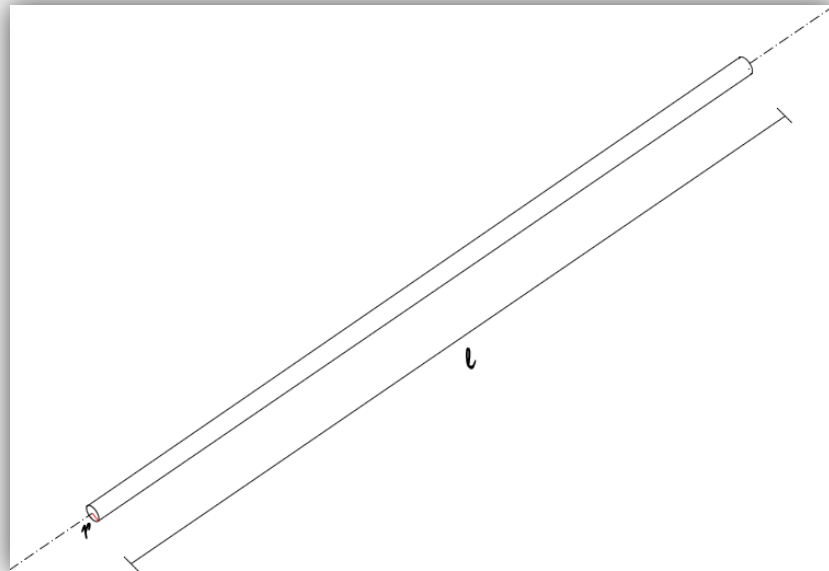
Come avevamo anticipato alla fine del precedente capitolo, l'accordatura è un processo di vitale importanza dello strumento musicale. Immaginiamo un'orchestra nella quale non si sia stabilita un'accordatura con un riferimento univoco... Una sinfonia si trasformerebbe in un frastuono incredibile. La prima cosa dunque che si rende necessaria ai fini di una perfetta accordatura è un riferimento in frequenza. Tale riferimento è il La₃, in notazione Europea, oppure A₄ in notazione americana. Tale La può essere in realtà accordato a diverse frequenze che vanno dai 432 Hz fino ai 445 Hz. La commissione internazionale di Ginevra ha però standardizzato l'intonazione del La₃ a 440 Hz. Tuttavia in orchestra non è difficile trovare accordature superiori, ad esempio a 442 Hz. Questo valore eccedente è giustificato dalla presenza degli archi che sembrano 'cantare'⁶ meglio a questa frequenza. Ci ricordiamo però che la tensione σ a parità di lunghezza l e sezione πr^2 della corda è direttamente proporzionale alla frequenza della nota, pertanto in un pianoforte, aumentare di 2 Hz il riferimento del La si traduce nel dover aumentare di molto la tensione delle corde e dunque, in ultimo, la trazione che il telaio in ghisa deve sopportare. Questo non è un problema per i pianoforti da concerto che riuscirebbero a sopportare addirittura la trazione corrispondente ad un incremento in frequenza di un tono; potrebbe divenire un problema per quei pianoforti da studio nei quali, aumentando in modo spropositato la tensione delle corde, si potrebbe assistere a fenomeni di collasso del telaio con conseguenti danni rovinosi ed irreversibili per lo strumento.

⁶ Si usa approfittare del termine cantare, in musica, anche se la linea melodica non è eseguita dalla voce umana ma da uno strumento, in particolar modo tale abuso avviene quando si parla degli archi, i quali in antichità furono progettati proprio con lo scopo di riprodurre la possibilità della voce umana di modificare non solo la frequenza ma anche l'ampiezza, cosa che gli strumenti a percussione ed in generale, tutti i cordofoni non possono fare.

Sembrerebbe che una volta stabilita la giustezza di questi rapporti essi dovrebbero coesistere in un tempo indefinito; purtroppo non è così e dunque viene naturale porsi la seguente domanda:

☑ Perché allora gli strumenti perdono l'accordatura ?

La trazione è uno sforzo meccanico al quale può essere sottoposto un corpo per mezzo di forze divergenti applicate alle sue estremità. Il caso più semplice è proprio la corda che possiamo vedere come un cilindro di lunghezza l e raggio r .



Definiamo $\sigma = \frac{F}{\pi r^2}$ la tensione di trazione della corda data dalla forza F applicata ai suoi capi, diviso l'area del cerchio di raggio r .

La deformazione è calcolabile come la variazione della lunghezza della corda sottoposta a trazione rispetto alla lunghezza della corda originale. Pertanto:

$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l}$$

Ricordando la legge di Hooke nel caso monodimensionale:

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

dove E è il modulo di elasticità relativo al materiale calcolato tramite il coefficiente di tensione di trazione e la deformazione.

Ricordando che $\delta l = \varepsilon l$ e che $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ possiamo concludere che:

$$\delta l = \frac{\sigma l}{E}$$

Questo sistema ci da una descrizione abbastanza coerente delle motivazioni per le quali una corda sottoposta a trazione modifica la sua lunghezza. Non tiene conto però delle variazioni che avvengono nel tempo a questa condizione di stabilità che dipendono da una grandissima moltitudine di fattori. E' chiaro comunque che siamo nel caso di un sistema tempo variante. Nella realtà fisica che ci circonda, tutto ciò che è sottoposto a forze esterne tende a ristabilire il suo equilibrio fisico originale, pertanto come una molla che eccitata per mezzo di una forza tenderà a ristabilire il suo stato inerziale iniziale a riposo, allo stesso modo una corda sottoposta a tensione cederà materia per unità di lunghezza assottigliandosi in sezione ed allungandosi (la quantità di materia per unità di volume si conserva) cosicché la forza di tensione diminuisca proporzionalmente al $\delta l(t)$ quindi: $F(\sigma(t)) \propto \frac{1}{\delta l(t)}$.

Questa visione del problema innesca un'ulteriore considerazione, ovvero il fatto che prima o poi, reiterando il processo di accordatura, la corda diventerà talmente sottile (e lunga) che non sarà più in grado di sostenere la forza di trazione alla quale viene sottoposta, rompendosi. Nei pianoforti d'epoca, fino al 1872, veniva utilizzato un telaio in legno. Il legno non assicurava grande tenuta dell'accordatura in quanto all'assestamento delle corde in acciaio si sommava l'assestamento del legno. In quest'anno Theodor Steinway brevettò il telaio in ghisa, che permette di sostenere tensioni maggiori con minori coefficienti di assestamento; i moderni telai in ghisa dei pianoforti da concerto sono in grado di sostenere una trazione di 20 tonnellate !

Giunti a questo punto dovrebbe essere molto chiara l'importanza di avere uno strumento perfettamente accordato.

Accordato in che modo? Che tipi di rapporti armonici devo stabilire? Rispetto a cosa?

Ecco che si rende necessario illustrare i sistemi di accordatura. Ne analizzeremo brevemente solo alcuni cercando di motivare le scelte e la logica che ci ha fatto optare per utilizzare nella maggior parte degli strumenti musicali (quasi mai negli strumenti ad arco) l'accordatura con il sistema temperato equabile. L'analisi sarà molto poco dettagliata perché in questa sede non ci interessa discutere dei sistemi di accordatura dovendo utilizzare unicamente il sistema temperato. E' comunque argomento degno di nota analizzare, seppur sommariamente, il processo evolutivo che ci ha portato ad ideare il sistema temperato equabile sul quale baseremo tutti i postulati che seguiranno nella nostra analisi.

Il problema dell'accordatura è un problema molto antico. Pitagora fu il primo ad accorgersi che percuotendo una corda di lunghezza l e sezione s posta ad una certa trazione questa vibrava emettendo un suono legato in qualche modo a queste variabili. Modificando la lunghezza l della corda per mezzo di un capotasto che la divideva in due parti, questa produceva suoni diversi; in particolare ponendo il capotasto al centro della stessa, dividendola in due parti uguali, la sensazione associata al suono prodotto da questo nuovo **rapporto** era pari al doppio del precedente. Si definì in questo modo la tetrakty's pitagorica, ovvero un triangolo che riportava i rapporti $1/2, 2/3, 3/4$ che equivalgono rispettivamente agli intervalli di ottava, di quinta e di quarta. Tale sistema di accordatura era molto valido per musica di tipo monofonico, ovvero quella musica ove non si sovrapponevano voci, determinando appunto modi armonici. Per sopperire a questo problema Zarlino, definì un altro sistema di accordatura (quello Zarliniano) che era particolarmente indicato per musica polifonica. Purtroppo però gli strumenti solisti, soliti ad eseguire parti melodiche (pitagorica) contrastavano con gli strumenti che costituivano l'armonia (zarliniana) creando forti dissonanze. Per cercare di eliminare queste discrepanze nasce il sistema temperato, utilizzato soprattutto negli strumenti come il pianoforte nel quale non è possibile variare l'intonazione una volta accordato secondo un certo sistema di accordatura, per far sì che l'accordatura dello stesso fosse compatibile con ambo i sistemi.

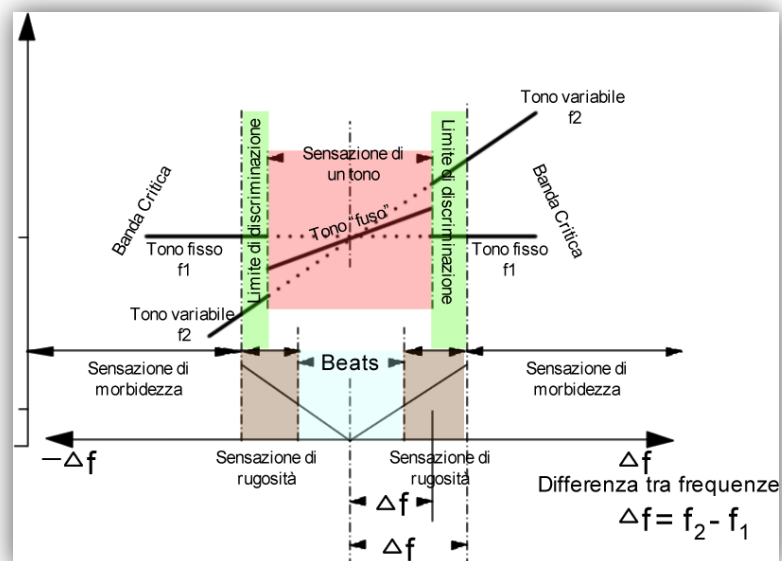
Il sistema di accordatura temperato equabile divide l'ottava in 12 semitoni equidistanti, pertanto la costante moltiplicativa della frequenza di riferimento è espressa come $f_n = \sqrt[12]{2}$. Il radicando rappresenta l'intervallo che vogliamo suddividere (2 = ottava), l'esponente il numero delle suddivisioni. Se volessimo ad esempio inventare un sistema pentatonico dovremmo dividere l'ottava in cinque semitoni, ovvero dovremmo moltiplicare la frequenza di riferimento per $\sqrt[5]{2}$.

Capitolo 4

Importanza della banda critica e battimenti

Se accordare uno strumento come il pianoforte si traducesse nello stabilire solamente le giuste frequenze in relazione ad un sistema di riferimento sarebbe fatto estremamente semplice e non varrebbe neanche la pena di redigere questa ricerca. Purtroppo nella realtà le cose non si comportano proprio in questo modo poiché l'accordatura impone di stabilire i giusti **rapporti armonici** che, per via di un fenomeno chiamato **“disarmonicità”**, quasi mai la frequenza fondamentale reale di una nota che piace all'orecchio è esattamente la frequenza dettata dal sistema di accordatura di riferimento.

Ci prefigureremo di capire nel prossimo capitolo cosa sia la disarmonicità, come essa influisca nell'accordatura del pianoforte e quali effetti causi a livello percettivo. Per poter comprendere cosa sia la disarmonicità ci è però necessario introdurre il concetto di banda critica.



Lo schema nella precedente pagina mette in correlazione grandezze fisiche con i corrispettivi modelli percettivi. Si fissa una frequenza f_1 e si fa variare una frequenza $f_2 \ll f_1$ fino a che $f_2 \gg f_1$. Quando la frequenza f_2 è vicina alla frequenza f_1 assistiamo a diversi fenomeni. Inizialmente, da due frequenze distinte si comincia ad avere difficoltà nel distinguerle; siamo appena entrati in ciò che prende il nome di “banda critica”. A questa difficoltà di scissione delle due frequenze è associata una sensazione di asprezza definita “rugosità”. Nella banda occupata dalla sensazione di rugosità si percepiscono le due frequenze come un unico suono. E’ interessante sapere che il suono percepito dall’orecchio in questa banda è esattamente la media delle frequenze dei due suoni: $f_m = \frac{f_2+f_1}{2}$.

Quando le due frequenze sono sufficientemente vicine $0 \leq |f_1 - f_2| \lesssim 15$, assistiamo ad un fenomeno psicoacustico chiamato **“battimento”**. Il battimento sarà argomento centrale sul punto focale dell’accordatura del pianoforte, ovvero la spartizione dell’ottava centrale, argomento che tratteremo nei prossimi capitoli.

☑ Il fenomeno dei battimenti è una modulazione in ampiezza derivante dalla somma di due onde di frequenza vicina le quali generano una nuova onda che individua una funzione interferenza. Dimostriamolo matematicamente...

Date due onde $y_1 = \sin(2\pi f_1 t)$ e $y_2 = \sin(2\pi f_2 t)$ vogliamo sommarle per ottenere l’equazione $y_3 = y_1 + y_2$.

$$y_1 + y_2 = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$$

Utilizzando la formula di prostaferesi

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Otteniamo:

$$y_1 + y_2 = 2 \sin\left(\frac{2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi f_1 t - 2\pi f_2 t}{2}\right);$$

$$y_1 + y_2 = 2 \cos\left(\frac{f_1 - f_2}{2} 2\pi t\right) \sin\left(\frac{f_1 + f_2}{2} 2\pi t\right);$$

In questa equazione ritroviamo due componenti. Una componente cosinusoidale, il cui argomento è un numero abbastanza piccolo dal momento che abbiamo scelto di sommare due frequenze vicine, ovvero quelle frequenze che possono generare battimenti visto che è questo il caso di nostro interesse. Il coseno avrà quindi un andamento molto lento. L'argomento della funzione seno, invece contiene la media delle due frequenze $\frac{f_1+f_2}{2}$, questo giustifica la sensazione del suono percepito nella banda dei battimenti pari proprio alla media delle due frequenze.

Possiamo scrivere un semplice programma di poche righe di codice in Matlab per graficare due frequenze vicine con $f_1 = 10\text{Hz}$ ed $f_2 = 12\text{Hz}$. Di seguito il codice commentato:

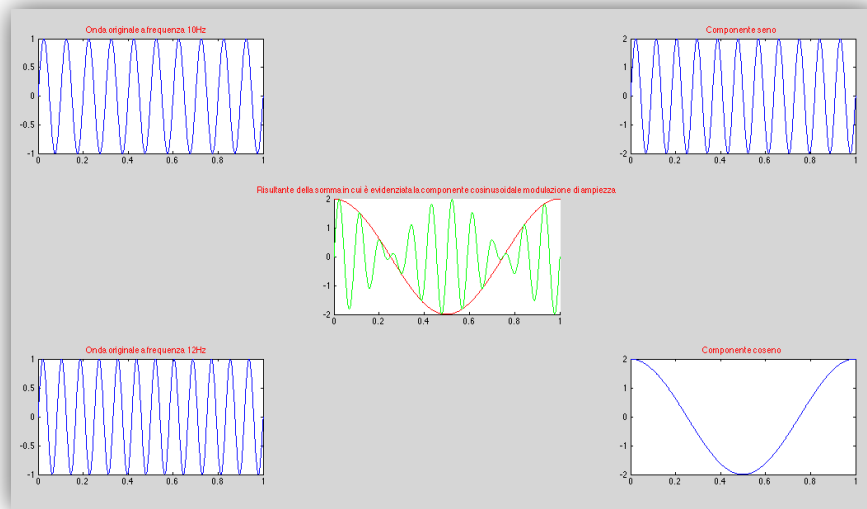
```
clear all; %Rimuovo tutte le variabili
close all; %Chiudo tutti i "figure" rimasti aperti
t=(0:0.001:1); %Inizializzo una variabile tempo da 0 a 1 secondi a
passi di 0,001
f1=10; %Memorizzo nella variabile f1 il valore di frequenza = 10
f2=12; %Memorizzo nella variabile f2 il valore di frequenza = 12
y1=sin(2*pi*f1*t); %Scrivo l'equazione della prima onda in funzione
della variabile f1 e t
y2=sin(2*pi*f2*t); %Scrivo l'equazione della seconda onda in
funzione della variabile f2 e t
somma=y1+y2; %Attribuisco alla variabile somma il valore di y1+y2
compcos=2*cos(((f2-f1)/2)*2*pi*t); %Trovo il valore isolato della
componente cosinusoidale dalla relazione di prostaferesi
compsin=2*sin(((f2+f1)/2)*2*pi*t); %Trovo il valore isolato della
componente sinusoidale dalla relazione di prostaferesi
subplot(3,3,1); %Grafico i risultati in una matrice di grafici 3x3
plot(t, y1);
title('Onda originale a frequenza 10Hz', 'color', 'red');
subplot(3,3,7);
plot(t, y2);
title('Onda originale a frequenza 12Hz', 'color', 'red');
subplot(3,3,5);
hold all;
```

```

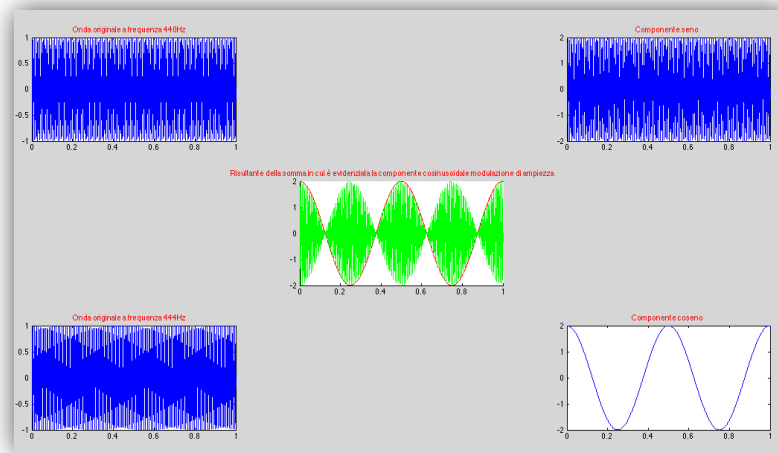
plot(t, compcos, 'red');
plot(t, somma, 'green');
title('Risultante della somma in cui È evidenziata la componente
cosinusoidale modulazione di ampiezza', 'color', 'red');
hold off;
subplot(3,3,3);
plot(t, compsin);
title('Componente seno', 'color', 'red');
subplot(3,3,9);
plot(t, compcos);
title('Componente coseno', 'color', 'red');

```

Mandato in esecuzione produce i grafici:



Per frequenze maggiori $f_1 = 440Hz$ ed $f_2 = 444Hz$:



Nei grafici precedenti, rappresentati in una matrice 3x3, in alto a sinistra è rappresentata la prima funzione d'onda y_1 avente una certa frequenza f_1 , in basso a sinistra la seconda funzione d'onda y_2 avente una frequenza f_2 , al centro il grafico della somma di $y_1 + y_2$, in alto a destra la componente sinusoidale ottenuta dai procedimenti algebrici di prostaferesi di cui sopra ed in basso la componente sinusoidale, ottenuta mediante gli stessi procedimenti che rappresenta la funzione interferenza che modula in ampiezza il segnale somma.

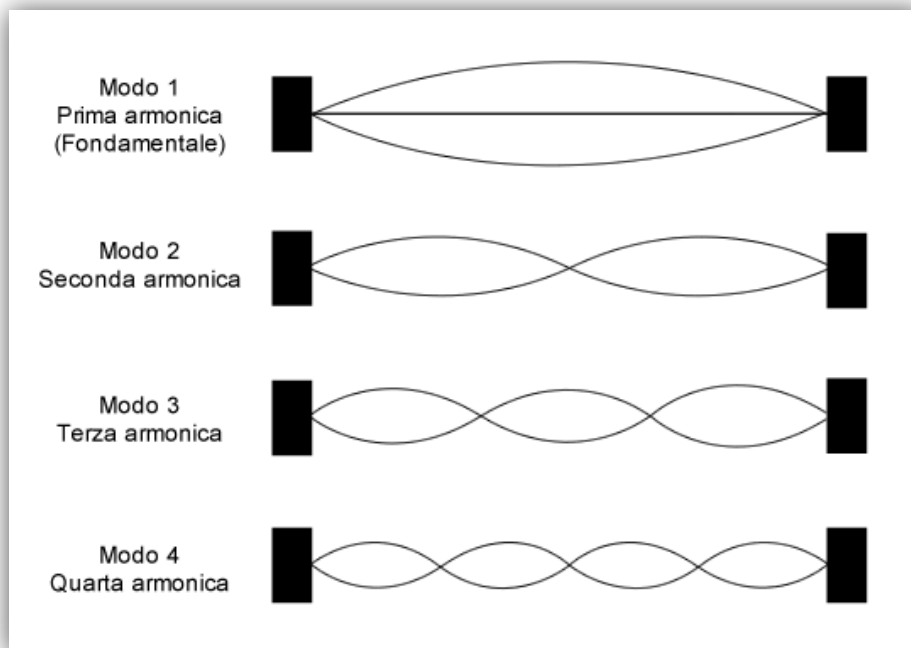
Questa componente sarà argomento focale nella trattazione dell'algoritmo in quanto parte integrante di esso.

Capitolo 5

Disarmonicità

Aver capito cosa sia il battimento è di fondamentale importanza per la trattazione delle tematiche a seguire. Intuiremo tra un attimo come il battimento sia fortemente legato, entro certi limiti, al concetto di disarmonicità e discuteremo su come servircene per creare uno degli algoritmi che ci servirà ad accordare correttamente il pianoforte.

La teoria degli armonici suggerisce che una corda percossa ha n modi di vibrare: produce la sua frequenza fondamentale ed una serie di armonici pari ad n volte la frequenza fondamentale (prima armonica).



Nella teoria questi suoni armonici dovrebbero essere dei multipli interi della frequenza fondamentale. Es. Prima armonica (fondamentale): 440Hz, seconda armonica: 880Hz ($440 \cdot 2$), terza armonica: 1320Hz ($440 \cdot 3$), ecc.

Nella realtà queste armoniche non sono esattamente dei multipli interi della frequenza fondamentale e si discostano da questi seguendo una certa tendenza a parità di un fattore I che chiameremo: costante di disarmonicità.

☑ Il problema ora è stabilire come calcolare la disarmonicità. Quando una corda viene spostata di una distanza y ad una posizione x , la tensione T della corda crea una forza che tende a ripristinare la corda nella sua posizione di equilibrio. Questa forza può essere espressa come:

$$T \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Se reinterpretiamo questa forza usando la seconda legge di Newton, ci viene restituita la classica equazione d'onda. In ogni caso la corda non può essere modellata come ideale poiché presenta un certo coefficiente di elasticità, o inversamente un coefficiente di rigidità. Anche questo coefficiente di rigidità tende a riportare la corda nella sua posizione iniziale pertanto:

$$-QSK^2 \frac{d^4 y}{dx^4}$$

Q è il modulo di Young della corda, S è la sezione della corda e K è il raggio di girazione⁷.

⁷ Dato un sistema di riferimento, fissata una retta, il raggio di girazione rappresenta la distanza della retta alla quale dovrebbe trovarsi un puntomateriale con massa pari a quella del sistema per avere lo stesso momento

Usando la seconda equazione di Newton con la somma di queste due forze, otteniamo questa equazione differenziale del quarto ordine che governa il moto della corda:

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} - QSK^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = \sigma \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Abbiamo introdotto il nuovo termine σ è la densità lineare della corda al tempo t .

Introduciamo alcune sostituzioni:

$$I = \frac{\pi^2 QSK^2}{Tl^2}$$

$$f_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Dove l è la lunghezza della corda, I è il coefficiente di disarmonicità ed f_0 è la frequenza fondamentale. Se la corda avesse un coefficiente di disarmonicità pari a 0, i parziali sarebbero armonici. Assumendo la soluzione all'equazione $T \frac{d^2 y}{dx^2} - QSK^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = \sigma \frac{d^2 y}{dx^2}$ nella forma di un complesso esponenziale diverrebbe:

$$k^4 - \frac{k^2}{4Il^2} - \frac{f^2}{16Il^4 f_0^2} = 0$$

dove f è la frequenza di ogni possibile parziale. Da questa equazione, possiamo osservare che per ogni possibile valore di f , ci sono quattro possibili valori di K .

d'inerzia che il sistema dato ha rispetto alla retta. In altre parole s'intende la distanza K dall'asse di rotazione alla quale dovrebbe pensarsi concentrata tutta la massa m del corpo.

Se imponiamo alcune condizioni limite ad esempio $y = \frac{d^2x}{dy^2} = 0$ a $x = \pm \frac{1}{2}$ considerando $x = 0$ come centro della corda, il valore $K = \frac{n}{2l}$ dove n è un intero dispari ($n = m * 2 - 1$ con $m \in \mathbb{N}$).

Ora per ogni valore di K esiste un corrispondente valore di f trovato usando la

$$k^4 - \frac{k^2}{4Il^2} - \frac{f^2}{16Il^4f_0^2} = 0$$

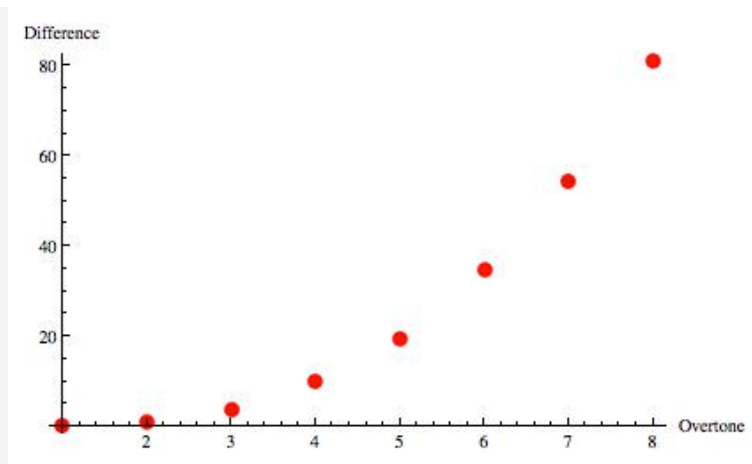
Pertanto:

$$f_n = nf_0\sqrt{(1 + In^2)}$$

Altri modi di trovare la frequenza delle armoniche ricalcolate in base al coefficiente di disarmonicità provengono per vie sperimentali⁸.

Per procedere in modo empirico abbiamo bisogno di uno strumento che ci permetta di analizzare lo spettro di ampiezza di una nota. Per fare questa prova registriamo in un file wav una nota del pianoforte (in questo caso di uno Steinway B) ed andiamo ad analizzarlo in Matlab. Analizziamo le prime 8 armoniche:

⁸ Dati sperimentali ottenuti dal sito <http://daffy.uah.edu/>



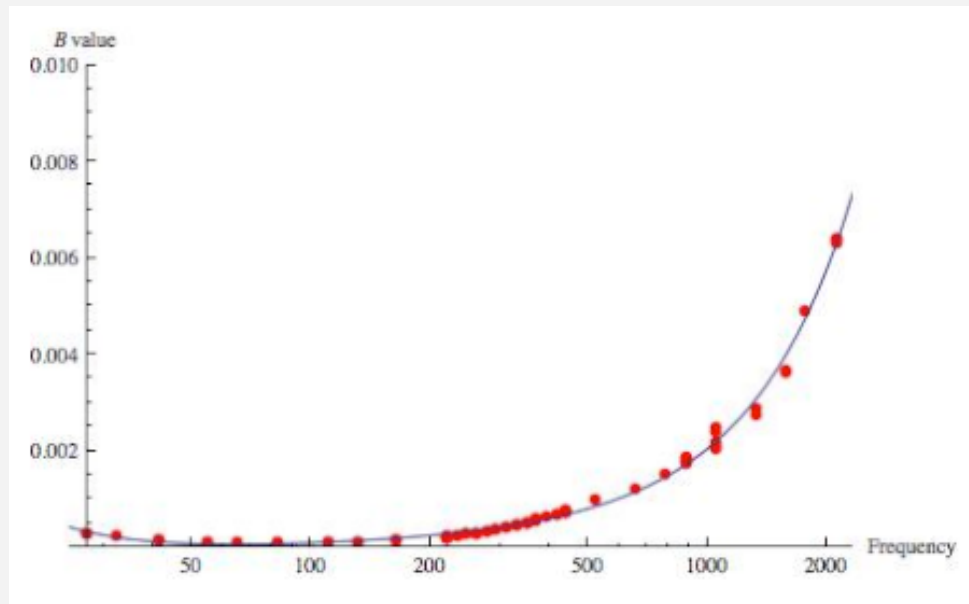
Possiamo trovare i valori reali appena ottenuti, confrontandoli con i valori teorici calcolati e li andiamo a riportare in tabella.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Misurati	440.0	880.9	1323.9	1769.8	2219.7	2674.6	3135.4	3603.1
Teorici	440	880	1320	1760	2200	2460	3080	3520
Differenza (in Cents)	0	1.8	5.1	9.6	15.4	22.5	30.9	40.4

Dobbiamo trovare una relazione che compensi i calcoli teorici in modo non lineare. Tale relazione può essere ottenuta effettuando un fit non lineare che viene ben descritto attraverso la relazione ottenuta per via empirica:

$$I = a + bx + cx^2 + \frac{d}{x} + \frac{e}{x^2}$$

Questa formula permette il calcolo della disarmonicità per ogni frequenza x . Proviamo a calcolare la disarmonicità in uno Steinway B considerando che difficilmente si riesce a trovare la disarmonicità su frequenze superiori a quelle corrispondenti al C6 in quanto ad alte frequenze si hanno tempi di inviluppo molto brevi che non permettono di far sviluppare sufficienti armonici che servono ad ottenere un fit molto preciso.



I coefficienti ottenuti dal fit dei valori ottenuti da uno Steinway B sono:

$$a = 5.22964 \cdot 10^{-6}$$

$$e = 0.429601$$

Trovato il coefficiente di disarmonicità possiamo calcolare la frequenza corretta di ogni nota utilizzando la formula:

$$f_n = n f_1 (1 + 0.5(n^2 - 1)I)$$

dove n è il numero del parziale ($n = 1$) è la fondamentale ed I è il coefficiente di disarmonicità calcolata tramite il fit.

Alla luce di quanto detto abbiamo capito che la disarmonicità dipende molto anche dalla trazione della corda in quanto la trazione può essere vista come una componente che influisce sulla rigidità della corda; una corda avente un valore alto di trazione è automaticamente più rigida della stessa corda avente trazione minore. Nel caso in cui il pianoforte sia estremamente fuori accordatura, si consiglia di effettuare una prima accordatura per riportarlo in tono e poi accordarlo tenendo conto dei calcoli sulla disarmonicità. Ne parleremo nel prossimo capitolo quando andremo finalmente ad affrontare gli algoritmi per l'accordatura del pianoforte.

Capitolo 6

Nozioni di teoria musicale: intervalli

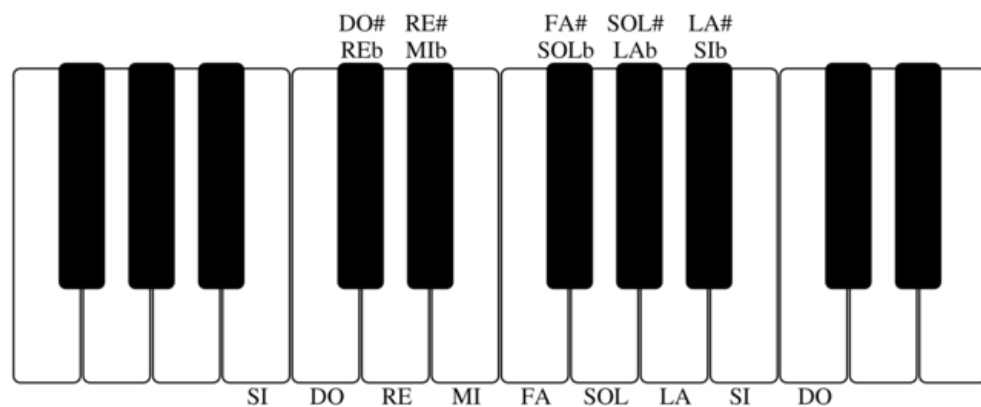
Abbiamo finora analizzato le difficoltà a livello ingegneristico dell'accordatura del pianoforte; al fine di poter realizzare fisicamente un'accordatura abbiamo la necessità di prendere una certa familiarità con i concetti di teoria musicale di base, in particolare parliamo di notazione musicale, di scala (utilizzeremo soprattutto quella maggiore come riferimento) e di intervallo: argomento di vitale importanza nell'accordatura proprio perché è alla base dei rapporti armonici (rapporti tra più suoni) che andremo a stabilire nella spartizione dell'ottava centrale. In questo capitolo cercherò di essere molto pratico (per scelta) dovendo permettere la fruibilità di questa tesina anche a chi non ha particolare dimestichezza con le trattazioni nel campo della teoria musicale. I musicisti vorranno perdonarmi alcuni praticismi oppure potranno saltare questo capitolo e andare direttamente al successivo.

Per prima cosa si rende necessario prendere visione di ciò che è la tastiera di un pianoforte. Tipicamente, salvo rare eccezioni, la tastiera è composta di ottantotto tasti. Nel pianoforte ogni tasto permette di realizzare una nota, o visto in ambito frequenziale, la sua rispettiva frequenza. Procedendo da sinistra della tastiera verso destra i suoni diventano man mano più acuti pertanto possiamo distinguere una regione grave, una regione media, una regione acuta ed una super-acuta; tali regioni in gergo vengono definite: “comparti”.



In notazione americana un pianoforte ha un'estensione che va dall'A0 al C8.

E' importante, al fine di comprendere gli argomenti a seguire, chiarire il concetto di tono e semitono. Il semitono è la distanza più piccola che possa esistere tra due note sulla tastiera del pianoforte.



Partendo dal tasto “Do” in figura il tasto immediatamente vicino rappresenta il suono che dista un semitono dalla nota di partenza, quindi nel nostro esempio partendo da Do, muovendomi di un semitono ascendente (verso gli acuti), andrò a suonare Do# (o analogamente Reb). Muovendomi di un semitono discendente suonerò il Si. Bisogna ora distinguere il semitono diatonico dal semitono cromatico. Suonare Do# e Reb sul pianoforte significa suonare la stessa nota. Negli altri strumenti, specie in quelli ad arco, il Do# ed il Reb non sono affatto la stessa nota; pertanto distinguiamo il semitono cromatico, ovvero quel semitono che non fa cambiare il nome alla nota di partenza, ad esempio: Do – Do#. Chiamiamo invece semitono diatonico quel semitono che fa cambiare il nome alla nota di partenza, ad esempio: Do – Reb. Unendo due semitoni otteniamo un tono, ad esempio unendo Do – Do# e Do# - Re, ottengo il tono Do – Re.

L'unione di toni e semitoni secondo una certa logica ci permette di costruire tutti i tipi di scale tra cui le più importanti sono quelle maggiori e minori.

Di nostro particolare interesse sarà nella trattazione quella Maggiore alla quale ci riferiremo ogni volta in cui dovremmo trovare un intervallo.

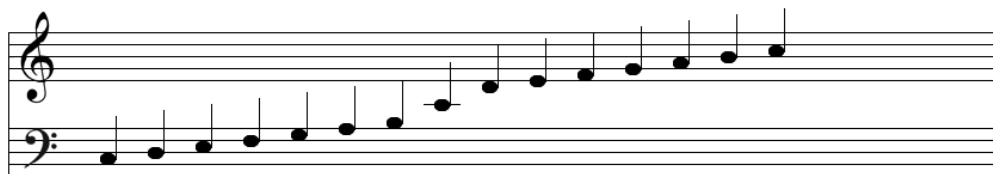
Lo schema per definire una scala Maggiore partendo da una qualsiasi nota è il seguente:

$$T - T - 1/2T - T - T - T - 1/2T$$

Portiamo l'esempio della scala di Do maggiore:

Partendo da Do, dobbiamo ottenere una nota che dista un tono da quella di partenza, ci muoviamo sul Re. Dal Re dobbiamo muoverci sulla nota che ne dista un tono, il Mi. Dal Mi abbiamo bisogno della nota che dista un semitono e ci

muoviamo sul fa... Proseguendo fino a completare lo schema otteniamo la scala di Do.



Avremmo potuto iniziare da qualsiasi nota ed applicando lo schema riportato è possibile ottenere qualsiasi tipo di scala Maggiore.

L'intervallo, concetto che utilizzeremo per comprendere i rapporti armonici tra suoni, si basa sulla distanza che c'è tra due note. In particolare l'intervallo consiste in due informazioni. La prima è il grado dell'intervallo, la seconda il tipo.

Per grado di intervallo si intende il numero di note che dividono le due note nominali, ad esempio: Do – Sol = Intervallo di quinta (Do (1) – Re (2) – Mi (3) – Fa (4) – Sol (5)).

La tipologia riguarda la classificazione dell'intervallo in Maggiore, minore e giusto.

Gli intervalli giusti sono: l'unisono, la quarta, la quinta e l'ottava, gli intervalli Maggiori o minori sono: la seconda, la terza, la sesta e la settima.

Se le note che compongono l'intervallo fanno parte della scala maggiore associata alla prima nota dell'intervallo allora lo stesso intervallo potrà essere sicuramente maggiore o giusto, ad esempio: Do – La = Intervallo di sesta maggiore perché entrambe le note fanno parte della scala di Do maggiore, oppure Sib – Mib = Intervallo di quarta giusta perché entrambe le note fanno parte della scala di Sib Maggiore.

Se, dato un intervallo maggiore, uno dei due estremi dell'intervallo viene diminuito di un semitono, l'intervallo diventa minore, ad esempio: Do – Mi = Intervallo di terza maggiore – Do – Mib = Intervallo di terza minore. Nel caso degli intervalli giusti, se un intervallo giusto viene diminuito di un semitono l'intervallo diverrà “diminuito”, ad esempio: Do – Sol = Intervallo di quinta giusta – Do – Solb = Intervallo di quinta diminuita.

Possiamo assistere anche ad alcuni casi in cui l'intervallo viene aumentato di un semitono; in questo caso sia gli intervalli maggiori che gli intervalli giusti diventeranno “aumentati”, ad esempio: Do – La = Intervallo di sesta maggiore – Do – La# = Intervallo di sesta aumentata, oppure negli intervalli giusti: Do – Sol = Intervallo di quinta giusta – Do – Sol# = Intervallo di quinta aumentata.

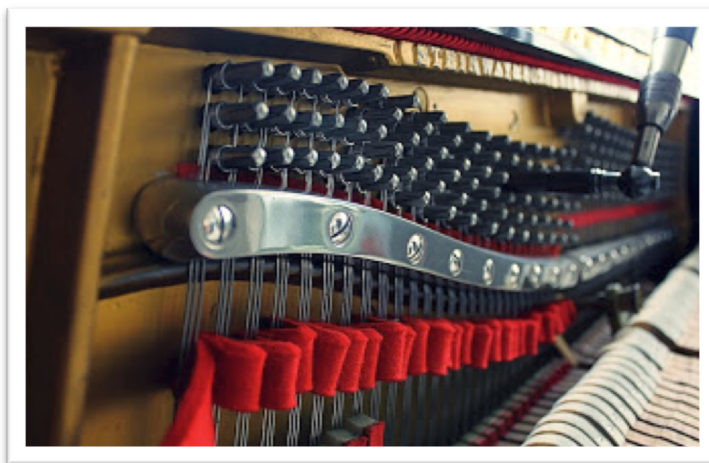
Capitolo 7

Algoritmi per l'accordatura

In questo capitolo cominceremo ad articolare una metodologia per l'accordatura del pianoforte così come viene effettuata dall'accordatore, dobbiamo pertanto descriverne i processi in modo dettagliato, cosicché il software che stiamo caratterizzando emuli elettronicamente l'accordatore e/o istruisca il novello accordatore sulle metodologie da seguire.

La prima cosa da fare per accordare un pianoforte è isolare i cori. Ogni nota del pianoforte è composta da 1 a 3 corde. Quando una nota ha 2 o 3 corde esse costituiscono un “coro”. E' chiaro che risulta impossibile accordare una nota se il suono è prodotto dalla vibrazione simultanea di tre corde. Si rende necessario isolare due corde per poter accordare una corda alla volta. Successivamente infatti, ad accordatura ultimata si procederà all'accordatura delle altre corde che costituiscono il coro.

Si procede come in figura utilizzando un feltro innestato tra coro di una nota e coro delle successive e precedenti di modo che vengano isolate due delle tre corde nei cori a tre ed una delle due corde in caso di cori a due.



Una volta isolate le corde dei cori, il passo successivo è quello di accordare la nota di riferimento, nel nostro caso il La 440 Hz. Tipicamente questa operazione viene svolta utilizzando come riferimento il diapason. Il diapason viene percosso ed avvicinato all'orecchio dell'accordatore che suonando insieme la nota corrispettiva al La del pianoforte dovrà agire sulla caviglia tramite la chiave al fine di aumentare o diminuire la tensione della corda ed annullare i battimenti tra il suono del diapason ed il suono della corda percossa.

A questo punto non ci resta che spartire l'ottava utilizzando le regole teoriche dei battimenti tra parziali e, una volta divisa l'ottava temperata, riportare le ottave superiormente ed inferiormente a battimenti 0.

Spiegato in queste parole la procedura sembra alquanto semplice, nella realtà il procedimento è molto complesso e richiede anni di pratica per essere effettuato con buona precisione ma soprattutto con gusto.

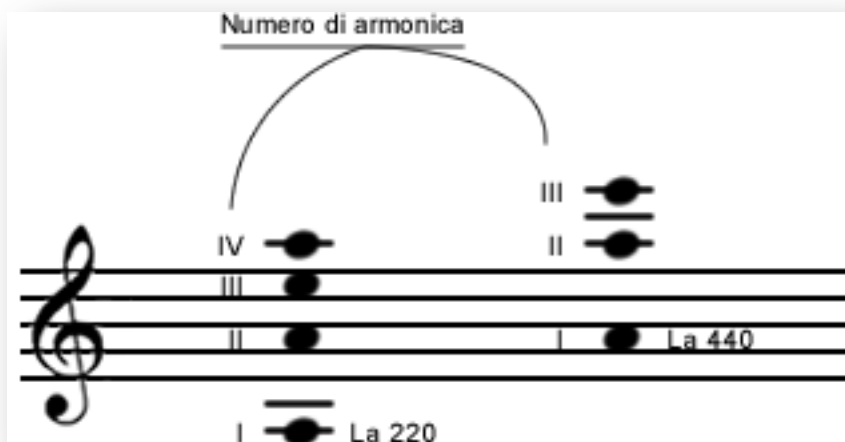
Se dobbiamo caratterizzare un algoritmo, che in realtà è composto da una serie di istruzioni le quali si occupano ognuna di risolvere una problematica non ci resta che seguire passo passo il metodo “ad orecchio” e cercare di imitare a livello software, per quanto possibile, l'essere umano.

Gli elementi hardware necessari saranno: un Personal Computer, una scheda audio interfacciata ad esso ed un microfono. Dovendo fare delle misurazioni in frequenza non è importante che il microfono sia di alta qualità, potrebbe andare bene anche un microfono da 10 euro.

- Una volta isolati i cori con il nastro di feltro, cosa che non richiede certamente di essere trattata ai fini dell'implementazione dell'algoritmo, dobbiamo procedere

con l'accordatura del La 440 Hz. Banalmente l'idea è di prendere in ingresso il segnale del microfono, realizzare un FFT (Fast Fourier Transform) interessandoci al valore della frequenza fondamentale del La. Se nella trasformata il valore è minore di 440 Hz dovremo applicare maggior tensione alla corda, viceversa minore tensione finché il valore di picco della parziale fondamentale nello spettro di frequenza sia in un intorno di $440\text{Hz} \pm 0.1\%$ considerando un errore di 2 cent (soglia minima differenziale udibile).

- Successivamente dovremo spartire l'ottava centrale con il sistema temperato equabile. L'ottava centrale non presenta grossi problemi di disarmonicità pertanto possiamo contare il numero dei battimenti generati tra i parziali isofrequenziali, tenendo conto che il numero di battimenti nelle ottave è 0. Applicando il ragionamento che stiamo facendo tra due ottave possiamo trarne le seguenti conclusioni:



In questo caso particolarmente semplice il calcolo dei battimenti tra ottave è banale ma è comunque possibile estendere il ragionamento a qualsiasi intervallo. Tra il la 440 Hz ed il La 220Hz si ricerca la prima armonica isofrequenziale che è

proprio il La 440. Si procede prendendo in considerazione il La2 220Hz e si moltiplica per il numero dell'armonico isofrequenziale (in questo caso il secondo) ottenendo 440 Hz **naturale**. Adesso dobbiamo prendere la frequenza della seconda nota nello specchio delle frequenze temperate, il La3 440 e lo si moltiplica per la sua armonica isofrequenziale (la prima); ecco che in questo caso particolare è sé stesso pertanto la differenza tra le armoniche isofrequenziali è 0 dunque affinché le ottave siano perfettamente accordate nel sistema temperato non si deve assistere al fenomeno dei battimenti. Come avevamo fatto precedentemente anche questa volta prenderemo il segnale proveniente dal microfono in ingresso nella scheda audio ed effettueremo la FFT.

L'idea innovativa di questo sistema di accordatura rispetto quegli esistenti si basa proprio sulla spartizione dell'ottava per campioni armonici. **I tuners in commercio comparano le frequenze sullo spettro con campioni di riferimento, sapendo però che ogni intervallo deve avere un certo numero di battimenti. E' secondo me invece interessante simulare il metodo di accordatura ad orecchio, facendo ascoltare al nostro tuner non più una singola nota ma un bicordo che caratterizza un intervallo.** Nello spettro delle frequenze terremo fissa una frequenza di riferimento già accordata e faremo variare l'altra finché non si raggiungerà l'esatto numero di battimenti calcolati attraverso la banale formula: $f_b = f_2 - f_1$ dove f_1 ed f_2 si riferiscono alle frequenze dei primi armonici isofrequenziali.

Esistono diversi metodi di accordatura ad orecchio: si può procedere per terze e seste, oppure per quarte e quinte. Riportiamo nella tabella seguente entrambe le metodologie, con il corrispettivo numero di battimenti ed illustreremo il calcolo dei battimenti in un intervallo diverso dall'ottava dove effettivamente esista una frequenza di battimento $f_b \neq 0$.

SUDDIVISIONE DELL'OTTAVA CENTRALE TRAMITE
PROGRESSIONE DI BATTIMENTI DI QUARTE E QUINTE.

Passi accordatura	Prima nota bicordo	Seconda nota bicordo	Intervallo	Numero di Battimenti
1	A3	A2	8a	0
2	A2	C#3	3a	8,73
3	Db3	F3	3a	11,00
4	F3	A3	3a	13,86
5	F3	F2	8a	0
6	F2	A2	3a	6,93
7	A2	C#3	3a	8,73
8	Db3	F3	3a	11,00
9	F3	A3	3a	13,86
10	A2	D3	4a	0,99
11	F2	Bb2	4a	0,78
12	Db3	Gb2	5a	0,62
13	Bb2	Eb3	4a	1,05
14	F#2	B2	4a	0,83
15	D3	G2	5a	0,66
16	B2	E3	4a	1,11
17	G2	C3	4a	0,88
18	Eb3	Ab2	5a	0,70

Come abbiamo visto nel caso semplice dell'ottava abbiamo considerato la differenza di frequenza tra armonici isofrequenziali per calcolare la frequenza di battimento. Esaminiamo un caso meno banale dell'ottava. Al passo 2 ad esempio abbiamo una frequenza di battimento di 8,73 al secondo. Effettuiamo i calcoli:



In questo esempio gli armonici isofrequenziali sono il quinto per il LA2 ed il quarto per il DO#3.

Prendo la frequenza del LA2 (220 Hz) e la multiplico per il numero dell'armonico (5). Ottengo la frequenza 1100 Hz. Faccio lo stesso procedimento per il DO#3. La frequenza dalle tabelle temperate è 277,18 e la multiplico per 4 ottenendo 1108,73. Calcolo la frequenza di battimento $f_b = f_2 - f_1$ ed ottengo $f_b = 8,73 \text{ Hz}$.

E' interessante simulare il processo in matlab campionando il suono del LA2 e del DO#3, sommandoli ed analizzando lo spettro del nuovo suono somma. Se il pianoforte è stato ben accordato, osservando lo spettro in un intorno della frequenza 1100, dovremmo avere due picchi molto vicini dati dai parziali isofrequenziali dei due suoni.

Sono state campionate le note A2 e C#3 di uno Steinway D Concert Grand in formato Wave PCM. Di seguito il codice della simulazione:

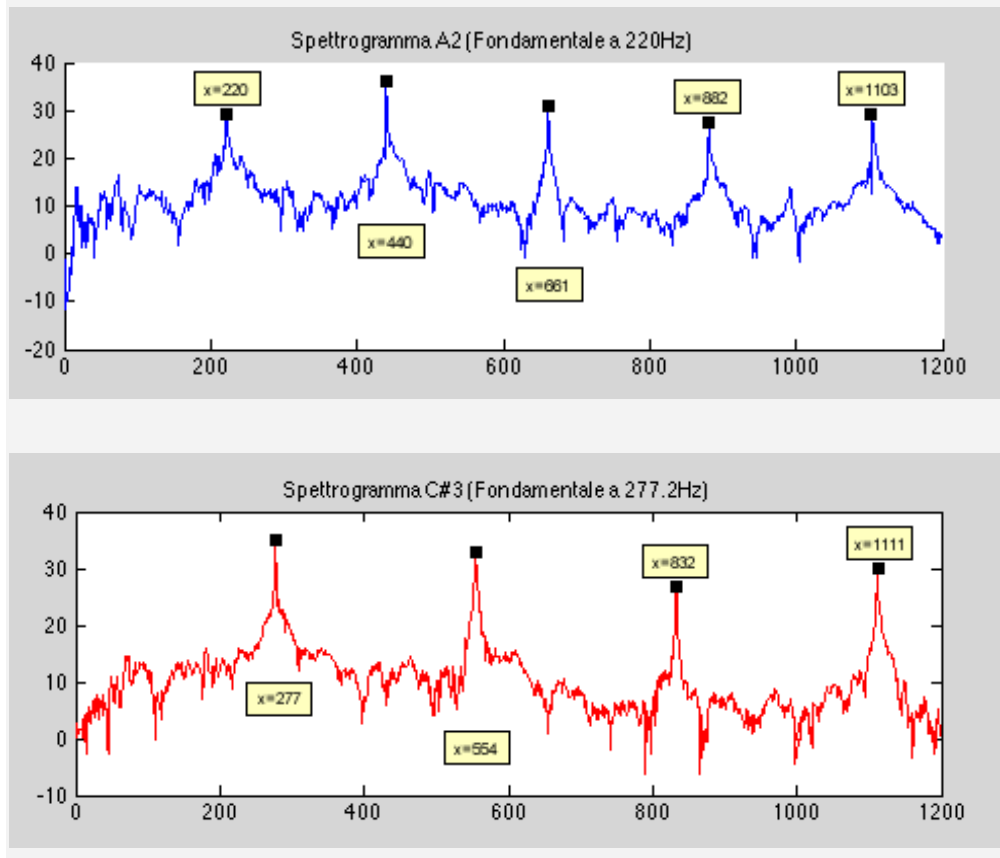
```
%Studio in frequenza dei suoni di pianoforte A2, C#3 e del
bicordo A2+C#3
clear all;
close all;
%acquisisco i suoni in due vettori
a2 = wavread('A2.wav');
c3 = wavread('C3.wav');
%limito la lunghezza dei vettori a 44100 campioni
a2 = a2(1:44100);
c3 = c3(1:44100);
%Memorizzo in due variabili lo spettro dei due suoni. Mi viene
restituito
%un numero complesso da cui posso ricavare modulo e fase
spectrum1 = fft(a2);
spectrum2 = fft(c3);
%creo l'asse delle x (frequenze)
freq = linspace(0,44100-44100/length(a2)-1, length(a2));
%limito l'asse delle frequenze a 1200 Hz poichÈ non ho bisogno
di valutare
%armonici superiori al quinto di Do diesis
freq = freq(1,1:1200);
%limito lo spettro normalizzandolo alla lunghezza del vettore
frequenza,
%inoltre limitando il vettore elimino anche problematiche date
dai fenomeni
%di mirroring.
spectrum1 = spectrum1(1:1200);
spectrum2 = spectrum2(1:1200);
%faccio il grafico del modulo dello spettro di A2
normalizzandolo in dB
subplot(3,2,1);
hold all;
plot(freq,10*log10(abs(spectrum1)), 'blue')%la finestra altera
lo spettro.
%Se non ci mettiamo in db non ce ne rendiamo neanche conto.
title('Spettrogramma A2 (Fondamentale a 220Hz)');
%faccio il grafico del modulo dello spettro di C#3
normalizzandolo in dB
subplot(3,2,5);
plot(freq,10*log10(abs(spectrum2)), 'red')
title('Spettrogramma C#3 (Fondamentale a 277.2Hz)');
%Genero l'intervallo di terza maggiore, realizzo lo spettro e
grafico il
%modulo.
```

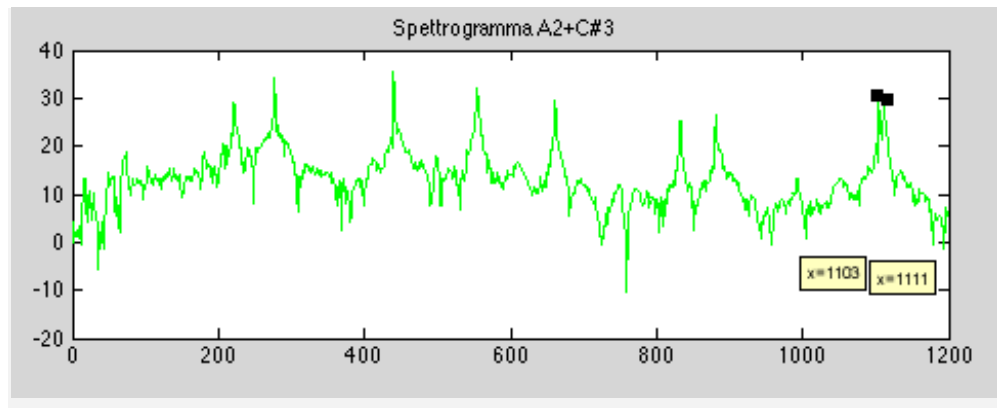
```

somma=a2+c3;
spectrumsonna=fft(somma);
spectrumsonna=spectrumsonna(1:1200);
subplot(3,2,4);
plot(freq,10*log10(abs(spectrumsonna)),'green')
title('Spettrogramma A2+C#3');

```

Otteniamo i grafici:





E' di particolare interesse l'ultimo grafico (in verde) che rappresenta la somma membro a membro dei vettori A2 e C#3. Le parziali isofrequenziali sono, come già visto, la 5a per il LA2 e la 4a per il DO#3. Notiamo che il quinto armonico parziale del La ha una frequenza di 1103 Hz, mentre il quinto armonico parziale del Do# ha una frequenza di 1111 Hz. Sapendo che l'orecchio umano può riconoscere battimenti fino ad un numero massimo di 15 circa, ci aspettiamo di trovare una differenza udibile tra i parziali isofrequenziali. Utilizzando la formula per il calcolo della frequenza di battimento: $f_b = f_2 - f_1$ troviamo che $f_b \approx 1111 - 1103 = 8 \text{ Hz}$. Questa misurazione sperimentale è compatibile con quanto ipotizzato nelle precedenti pagine. La misura è molto approssimata in quanto, in questa sede, ci interessava dimostrare la compatibilità teorica con le prove sperimentali, nonostante questo, è molto interessante notare che nei primi due grafici le frequenze delle armoniche successive non sono esattamente multipli della fondamentale proprio a causa della disarmonicità anche se nell'ottava centrale la cosa risulta molto attenuata.

Di seguito possiamo scrivere la tabella per la suddivisione dell'ottava temperata procedendo per terze e seste.

SUDDIVISIONE DELL'OTTAVA CENTRALE TRAMITE
PROGRESSIONE DI BATTIMENTI DI TERZE E SESTE.

Passi accordatura	Prima nota bicordo	Seconda nota bicordo	Intervallo	Numero di Battimenti
1	A3	A2	8a	0
2	A2	C#3	3a	8,73
3	Db3	F3	3a	11,00
4	F3	A3	3a	13,86
5	F3	F2	8a	0
6	F2	A2	3a	6,93
7	A2	C#3	3a	8,73
8	Db3	F3	3a	11,00
9	F3	A3	3a	13,86
10	F2	D3	6a	7,92
11	D3	Bb2	3a	9,25
12	Bb2	Gb2	3a	7,34
13	Gb2	Eb3	6a	8,39
14	Eb3	Cb3	3a	9,80
15	B2	G2	3a	7,78
16	G2	E3	6a	8,89
17	E3	C3	3a	10,38
18	C3	Ab2	3a	8,24

Una volta divisa l'ottava centrale, l'accordatore dovrà procedere a “**riportare**” le ottave successive. Ci ricordiamo che le ottave successive non devono presentare fenomeni di battimento. Purtroppo però, se andremo a implementare il nostro software per accordare, fissando una frequenza e “muovendo” quella da accordare, l'accordatura ne risulterà poco brillante, questo accade perché non stiamo ancora considerando i fenomeni di disarmonicità. Come abbiamo visto nel capitolo 5, le corde dei bassi e quelle degli acuti hanno coefficienti di disarmonicità via via più elevati. Questo accade a causa della rigidità, proprio perché come avevamo visto la disarmonicità è direttamente proporzionale alla rigidità e quest'ultima era, a sua volta, direttamente proporzionale alla tensione della corda ed anche direttamente proporzionale alla sezione. Inoltre l'orecchio umano, agli estremi della tastiera tende ad aumentare la sensazione di altezza in relazione alla pressione sonora: negli acuti maggiore è la pressione sonora, maggiore è la sensazione uditiva di altezza (a parità di frequenza). Nei gravi, accade il contrario: a maggior pressione sonora, la sensazione uditiva è tendente al grave (si ha la sensazione di un abbassamento di frequenza anche se l'effetto è minore che per i suoni acuti).

L'accordatore deve tener conto di questi parametri cercando il giusto compromesso.

Valutare queste variabili tramite software può diventare molto difficile infatti tutti i modelli di accordatori software ed hardware attuali si perdono proprio nei bassi e negli alti. Secondo la mia teoria, la correzione della disarmonicità deve essere effettuata tramite misurazione di ogni singola nota, inoltre, dato che la disarmonicità è, come già detto fortemente influenzata dalla rigidità e, come corollario, dalla tensione, qualora il pianoforte fosse eccessivamente scordato, è il

caso di effettuare una sorta di “rough tuning” al fine di portare le corde ad una trazione vicina a quella che avrebbero nell'accordatura definitiva al fine di minimizzare l'errore derivante da un calcolo errato del coefficiente di disarmonicità. Riguardo la correzione relativa alla non linearità dell'orecchio, sarebbe interessante avere un set di suoni registrati secondo una certa curva di stretching da porre in ascolto all'accordatore, tali da poter identificare la curva di stretch ottimale per l'orecchio che si appresta all'accordatura.

C o n c l u s i o n i

Concludendo questo lavoro, è secondo me di fondamentale importanza sottolineare che l'accordatura perfetta non esiste, pertanto realizzare una buona accordatura è frutto soprattutto del gusto e della finezza dell'orecchio di chi si appresta ad accordare lo strumento, tuttavia, sia a scopo professionale che a scopo didattico l'implementazione di un software che costituisca una guida per l'accordatore, può essere molto interessante per chi vuole imparare il difficile lavoro del tecnico accordatore di pianoforti, per chi voglia affinare le proprie capacità uditive e non ultimo come importanza, per il professionista nella riduzione del carico di stress acustico subito durante l'accordatura del pianoforte.