

Patrizio Barbieri

L'INARMONICITÀ NEGLI STRUMENTI MUSICALI A CORDA
(1543-1993).

Con una memoria inedita di J.-B. Mercadier (1784)

tratto da:

STRUMENTI, MUSICA E RICERCA

Atti del Convegno internazionale

Cremona, 28-29 ottobre 1994

a cura di E. F. Barassi et al.

ENTE TRIENNALE INTERNAZIONALE DEGLI STRUMENTI AD ARCO

Cremona, 2000

Patrizio Barbieri

L'INARMONICITÀ
DEGLI STRUMENTI MUSICALI A CORDA (1543-1993)

Con una memoria inedita di J.-B. Mercadier (1784)*

1. Introduzione

1.1. Inarmonicità

Prima di passare alla trattazione storica – con i relativi riferimenti bibliografici – verranno qui esposti i termini puramente tecnici del problema, unitamente alla simbologia adottata.

1. In una corda vibrante ideale, priva cioè di elasticità propria, i suoni armonici emessi sono multipli interi del fondamentale; assumendo uguali all'unità la frequenza di vibrazione di quest'ultimo, essi saranno quindi nel rapporto 1 : 2 : 3 : 4 : 5 ...

2. In realtà, le corde impiegate negli strumenti musicali sono sempre dotate di elasticità propria. Per corde di bassa rigidità, supposte lasciate liberamente vibrare dopo l'eccitazione e aventi gli estremi incernierati su supporti fissi, una soddisfacente approssimazione è la seguente:

$$f_n = n f_o (1 + b n^2) \quad (1)$$

ove f_n = frequenza di vibrazione del generico armonico n ;

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$;

f_o = frequenza fondamentale emessa da una corda ideale ($E = 0$)
avente le stesse dimensioni;

b = coefficiente esprimente il grado di inarmonicità.

* La presente relazione costituisce la versione italiana di un ampliamento del contributo presentato al Convegno, uscito in lingua inglese su «Studi Musicali», XXVII, 1998, pp. 383-419, col titolo: *The inharmonicity of musical string instruments (1543-1993). With an unpublished memoir by J.-B. Mercadier (1784).*

Per una corda di lunghezza L , di raggio R , di densità ρ , di modulo longitudinale E , e messa in tensione da una forza F si ha:

$$f_o = \frac{1}{2LR} \sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

$$b = \frac{\pi^3 R^4 E}{8 L^2 F}$$

Assumendo ad esempio $L = 1$ m, $R = 0.5$ mm, $\rho = 7800$ kg/m³ (acciaio), $E = 20000$ kg/mm², $F = 15$ kg, i primi quattro suoni armonici saranno approssimativamente nel rapporto (ponendo $f_1 = 77.45$ Hz = all'unità): 1.000 : 2.002 : 3.008 : 4.020 : ... Come si vede, essi non sono più multipli del fondamentale e si trovano inoltre a essere progressivamente sempre più distanziati fra loro: il moto della corda, sempre supponendo di lasciarla liberamente vibrare, non sarà quindi più periodico. In ciò consiste il fenomeno dell'inarmonicità.¹

Se le due estremità – anzichè essere incernierate – sono incastrate, la (1) si modifica nella

$$f_n = nf_o(1 + a + bn^2) = nf_o(1 + bn^2) + nf_o a \quad (2)$$

ove

$$a = \frac{2}{\pi} \sqrt{2b} + \frac{8}{\pi^2} b$$

Entro i limiti di tale approssimazione, gli armonici conserveranno comunque immutate le loro distanze relative, dato che tutti si innalzano della stessa quantità $nf_o a$. Il loro grado di inarmonicità, rispetto ai corrispondenti armonici della corda ideale, verrà fornito dal fattore

$$I_n = \frac{f_n}{nf_o} = 1 + a + bn^2 \quad (3)$$

(con $a = 0$ nel caso di estremi incernierati). Agli effetti pratici, un valore più significativo potrebbe però essere ottenuto prendendo come termine di riferimento la frequenza fondamentale f_1 della corda elastica, e cioè

$$I'_n = \frac{f_n}{f_1} \quad (3')$$

¹ Il termine 'inharmonic' è, in tal senso, comunemente impiegato nella letteratura tecnica anglosassone. La sua origine si spiega facilmente ricordando che gli armonici di una corda ideale danno luogo alla serie aritmetica 1, 2, 3, 4, ..., detta comunemente 'armonica' perchè tale diventerebbe se – come era costume nei secoli scorsi – tali suoni fossero espressi in lunghezze di monocordo:

Tali fattori vengono normalmente espressi in cents (il cent è acusticamente pari alla 1200^{a} parte dell'ottava, cioè al rapporto $2^{1/1200} : 1 = 1.00058$).

3. Per alte rigidità, la corda si trasforma in una verga, capace di vibrare per elasticità propria, senza l'ausilio della forza F esterna. I fenomeni già descritti per la corda rigida subiranno una marcata accentuazione; solo nel caso in cui la verga abbia le estremità incernierate (o appoggiate) gli armonici – pur progressivamente sempre più distanziati fra loro – saranno multipli del fondamentale, stando fra loro nel rapporto $1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 : \dots$

4. L'elasticità propria non costituisce l'unica fonte di inarmonicità in una corda vibrante: vedremo infatti che l'oscillazione dei supporti attraverso i quali essa viene tesa può avere un influsso determinante a riguardo.

1.2. Argomenti trattati

Nel corso del presente articolo la materia verrà così distribuita:

§2. Genesi storica delle formule (1) e (2). Documenti inediti rivelano che, contrariamente a quanto finora ritenuto, fu Jean-Baptiste Mercadier il primo a dimostrare (1783) che la rigidità della corda alterava la frequenza degli armonici emessi (a partire dal 1°) e che quindi ciò poteva avere ripercussioni sull'esatta divisione dei monocordi di cui allora si servivano i teorici musicali. Nel 1881 Rosario Alessi progettò e mise in commercio un piccolo monocordo portatile in cui, per la prima volta, si teneva conto della correzione dovuta a tale fattore.

§3. Problema dell'inarmonicità nei cembali e pianoforti; sue ripercussioni sui criteri di accordatura, tenendo anche conto dei fattori psicoacustici – già segnalati verso la metà del Settecento – e di quelli puramente 'culturali'.

§4. Rigidità delle corde e *detuning* negli strumenti da manico: Silvestro Ganassi (1543), Juan Bermudo (1555) e Adriaan Metius (1625) furono i primi ad accennare a correzioni del posizionamento dei tasti e del ponticello dovute a tali fattori; le indagini sul violino sono invece assai recenti.

Limitatamente agli strumenti musicali, si noterà come alcuni scritti di semplici 'musicisti pratici' talvolta anticipino osservazioni di carattere scientifico alle quali neanche i trattati dei 'matematici' avevano fino ad allora fatto allusione.

1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, ... In inglese l'implicita contraddizione del termine 'inharmonic' (o, raramente, 'anharmonic') riferito agli 'harmonics' può essere facilmente evitata chiamando questi ultimi 'overtones', 'partials', o semplicemente 'modes'; in italiano l'unica scappatoia sarebbe invece quella di definirli 'modi di vibrazione inarmonici'.

2. *L'inarmonicità della corda vibrante: sviluppo storico*

1636 – Le prime sistematiche indagini sulla vibrazione delle verghe cilindriche sono dovute a Marin Mersenne.² Egli trova che per ottenere un determinato rapporto fra le loro frequenze fondamentali f si dovrà avere, riferendosi al caso in cui esse siano fra loro simili (L e D indicano, rispettivamente, lunghezza e diametro):

$$L_1 : L_2 = D_1 : D_2 = f_2 : f_1 \quad (4)$$

Raddoppiando ad esempio il diametro e la lunghezza di un dato cilindro, se ne otterrà un altro vibrante all'ottava inferiore. Tale regola è esatta e viene da lui stesso espressa sotto altra forma in una tabella – redatta per facilitare la corretta progettazione degli xilofoni – da cui risulta esplicitamente che i volumi V e le frequenze fondamentali f di due verghe cilindriche simili stanno fra loro nel rapporto:

$$V_1 : V_2 = f_2^3 : f_1^3 \quad (5)$$

il che equivale a dire che la f è inversamente proporzionale alla radice cubica di V .³

Se i rilevamenti di Mersenne riguardanti le verghe cilindriche fra loro simili danno risultati corretti, non altrettanto si può dire per le rimanenti sue esperienze – sempre effettuate alla presenza «d'excellens geometres et musiciens» – relative a verghe cilindriche fra loro non simili. È comunque possibile che tali errori, in certi casi superiori a una o anche tre ottave, fossero dovuti al fatto di aver comparato fra loro modi di vibrazione non omologhi. Mersenne fa infatti rilevare che non era facile orientarsi fra i vari «suoni» emessi, specie all'aumentare del rapporto $L : D$; a causa di ciò, egli riferisce di essersi dovuto arrestare in corrispondenza di $L : D = 36 : 1$, cominciando quindi indirettamente a porre il problema della corda rigida. Prende anche in esame l'analogia tra le comuni corde vibranti e le verghe cilindriche, pur formulando delle ipotesi fisiche errate sulla diversità del loro comportamento dinamico. Passando all'incordatura degli strumenti musicali rimane comunque fedele a tale analogia, dato che

- le sue tabelle relative a cembali e spinette sono in perfetto accordo con la (4);⁴

² MARIN MERSENNE, *Harmonie universelle* [...], Paris, Cramoisy, 1636, «Traitez de la nature des sons, et des mouvements de toutes sortes de corps», pp. 175-180.

³ *Ibidem*, tabella alle pp. 179-180. Cfr. anche C. TRUESDELL, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788*, Turici [=Zurigo], Orell Füssli, 1960, p. 32 (il quale però, riguardo a quest'ultima conclusione, rileva qualche contraddizione in altre parti delle opere dello stesso Mersenne).

⁴ MERSENNE, *Harmonie* cit., «Traité des instrumens à chordes», pp. 120-122.

- negli strumenti da manico, essendo necessariamente L sempre la stessa, si limita a prescrivere che per ciascuna coppia di corde contigue sia $D_1 : D_2 = f_2 : f_1$ (ove le f sono riferite alle corde a vuoto); la più nota conseguenza di tale criterio – anche se Mersenne non lo fa mai rilevare – è quella di ottenere uno strumento costituito da corde poste in trazione da una forza F che risulta essere uguale per tutte.⁵

In sintesi si può comunque concludere che in Mersenne il concetto di rigidità della corda è solo sfiorato.⁶

1709 – Negli ambienti scientifici, la (4) doveva avere raggiunto una certa notorietà già nella seconda metà del Seicento.⁷ Nel 1709 essa verrà rinunciata, sotto la forma (5), da Louis Carré (il quale non solo non fa alcuna menzione di Mersenne, ma se ne attribuisce addirittura la paternità). Analogamente al suo predecessore, i suoi rilevamenti relativi a verghe fra loro non simili sono però errati, così come errate sono le sue ipotesi riguardanti il meccanismo di tali fenomeni vibratorii.⁸ Dette esperienze furono condotte con l'aiuto del «Signor Blanchet, fabbricante di cembali e spinette, che ha fama di essere uno di quelli che meglio accordano tal sorta di strumenti»⁹ (da identificarsi con Nicholas Blanchet, operante a Parigi dal 1686). Anche Carré si spinge a esporre qualche considerazione

⁵ *Ivi*, p. 51, a proposito di liuti e tiorbe. Tale criterio di scelta dei diametri verrà favorevolmente menzionato, con riferimento ai violini, fino ai tempi di Leopold Mozart (1756-1787) e Francesco Galeazzi (1791); le fonti posteriori a Mersenne lo citano però esclusivamente come il criterio che porta al pareggiamento delle tensioni, e sotto questa forma verrà per la prima volta esplicitamente menzionato solo nel 1690, in una memoria del veneziano Serafino Di Colco: cfr. P. BARBIERI, *Acustica accordatura e temperamento nell'Illuminismo veneto* [...], Roma, Torre d'Orfeo, 1987, pp. 46-48.

⁶ C'è un solo punto nella sua opera in cui viene introdotto un fattore di correzione che potrebbe anche far pensare alla rigidità, ma tale ipotesi è da scartare: cfr. S. DOSTROVSKI, *Early vibration theory: physics and music in the seventeenth century*, «Archive for history of exact sciences», XIV, 1975, pp. 169-218: 186-187. Del resto il religioso francese non fa alcun riferimento all'inarmonicità anche nei casi in cui essa dovrebbe chiaramente manifestarsi: cfr. ad esempio MERSENNE, *Harmonie* cit. in nota 4, p. 33, (ove illustra un monodoro dotato di due corde all'unisono, la prima delle quali viene da lui successivamente suddivisa – servendosi ogni volta del rapporto 2:1 – fino alla quinta ottava).

⁷ Cfr. H. FABRI, *Physica, id est scientia rerum corporearum*, II, Lugduni, Anisson, 1670, pp. 238-239.

⁸ L. CARRÉ, *De la proportion que doivent avoir les cylindres pour former par leurs sons les accords de la musique*, «Histoire de l'Académie Royale des Sciences», annata 1709, pp. 47-62 delle «Memoires de mathématique et de physique». Illustrando una delle sue esperienze (pp. 51-52), Carré dice che due verghe cilindriche aventi lo stesso diametro e le lunghezze nel rapporto 4:1 producono un intervallo di settima minore (mentre invece oggi sappiamo che tale intervallo dovrebbe essere di ventinovesima, pari cioè a ben quattro ottave): l'identico errato risultato era già stato trovato da MERSENNE, *Harmonie* cit. in nota 2, p. 175, segno che Carré non ignorava le ricerche del religioso suo conterraneo.

⁹ *Ibid.*, p. 51: «M. Blanchet Facteur de Clavecin et d'Epinettes, qui passe pour un de ceux qui accorde le mieux ces sortes d'Instrumens».

sull'analogia tra le verghe cilindriche e le comuni corde vibranti, concludendo che negli strumenti da tasto «forse il suono sarebbe molto più bello» se l'incordatura avvenisse secondo la (4); quel «forse» gli sarà stato con tutta probabilità suggerito da Blanchet, dato che le tabelle di Mersenne – nelle quali era prescritto il dimezzamento dei diametri in corrispondenza di ogni ottava, essendo appunto calcolate con la (4) – non erano certo in accordo con la pratica dei cembalari.

1770 – Il problema della vibrazione trasversale delle verghe viene completamente risolto, sia sotto l'aspetto analitico che sperimentale.¹⁰

1783 – Vengono effettuate le prime indagini sulla corda rigida vibrante, ad opera del francese Jean-Baptiste Mercadier (1750-1816), «ingénieur en chef des ponts et chaussées» del Département de l'Ariège (a Foix, quasi al confine con la Spagna). Le sue due memorie a riguardo – pur essendo state presentate in sede accademica – non furono comunque mai date alle stampe e sono rimaste fino ad ora ignorate.

In campo scientifico Mercadier lasciò altri studi, coprenti i più disparati campi; dalle sue ultime affannose lettere, contenenti inedite notizie di carattere professionale e familiare, risulta che al momento della morte cercava di ultimare un grosso trattato sulle opere di ingegneria marittima (cfr. Appendice, Doc. I). Il nome di Mercadier è oggi noto anche in campo musicale, ma unicamente per due lavori di carattere teorico;¹¹ dal suo *dossier* personale – conservato nelle Archives Nationales di Parigi – apprendiamo però che lasciò anche varie composizioni, fra cui alcuni pezzi «à grand orchestre» (Doc. I). Un suo raro ritratto è riprodotto in Fig. 1 (p. 261).¹²

Ma torniamo al nostro problema. In una serie di esperienze effettuate all'Accademia delle scienze di Montpellier il 25 novembre 1783, Mercadier dimostra quanto segue (Doc. II):

1. sia data una corda tesa la cui lunghezza totale L venga suddivisa nel rapporto $L_1 : L_2$ tramite un ponticello mobile: pizzicando le due por-

¹⁰ Cfr. BARBIERI, *Acustica* cit., p. 50.

¹¹ J.-B. MERCADIER, *Nouveau système de musique théorique et pratique*, Paris, Valade, 1776; ID., *Sur l'accord du clavecin, et sur le système de M. de Boisgelou, concernant les intervalles musicaux*, «Histoire et mémoires de l'Académie Royale des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse», III, 1788, pp. 139-168 (memoria letta il 27 aprile 1780 e apparsa anche come opuscolo *tiré à part*).

¹² Esso è stato tratto da una breve biografia apparsa su di un periodico locale: Jean-Baptiste Mercadier ingénieur et savant 1750-1816, «L'Ariégeois», agosto 1981, p. 44 sgg.; è segnalato come proveniente dagli archivi della Société Ariégeoise de Presse, di Saint-Girons (ringrazio Claudine Pailhes, direttore delle Archives Départementales de l'Ariège, che nel 1991 mi ha fornito le informazioni di cui sopra).



Fig. 1 Ritratto di Jean-Baptiste Mercadier (*cf.* nota 12).

zioni così ottenute si rileva che l'effettivo intervallo musicale da esse formato è sensibilmente più largo di quello espresso dal rapporto suddetto (se le lunghezze stanno tra loro come 2:1 si ottiene ad esempio un'ottava larga); per ridurre a zero tale errore bisogna spostare il ponticello in modo da accorciare leggermente la parte più lunga della corda;

2. tale errore è tanto più piccolo quanto più prossimo all'unità è il rapporto $L_1 : L_2$ e quanto più alta è la tensione della corda;
3. gli armonici emessi sono un po' più acuti di quelli teoricamente calcolabili come multipli interi del fondamentale; anche se non viene detto esplicitamente, dalle modalità dell'esperimento risulta inoltre automaticamente che salendo verso l'acuto tali armonici sono progressivamente sempre più distanziati fra loro.¹³

¹³ Figura inoltre un'esperienza (la n. 9) che conferma la maggiore consonanza della terza maggiore sintonica rispetto a quella «dei Greci» (cioè pitagorica), indiretta critica alle teorie dell'abate Pierre-Joseph Roussier, che proprio in quel periodo propugnava il ripristino dell'intonazione pitagorica nella pratica musicale.

Dette esperienze vengono anche descritte in una memoria da lui presentata il 22 luglio dello stesso anno all'«Accademia delle Scienze» di Parigi, memoria che non riproduco in Appendice perchè il suo contenuto informativo è sostanzialmente coincidente con quanto già riportato dal documento II.¹⁴ In essa formula comunque l'ipotesi che nella corda si formino – immediatamente prima degli estremi – due «nodi» che ne riducono l'effettiva lunghezza vibrante; cerca invano una legge generale che dia la loro effettiva posizione, concludendo con l'auspicio

*que de nouvelles observations et de nouveaux calculs fassent decouvrir les rapports de ces noeuds. Jusques alors il ne sera pas possible de trouver avec le compas sur une corde les intervalles musicaux avec une parfaite justesse.*¹⁵

che delle nuove osservazioni e dei nuovi calcoli facciano scoprire i rapporti di tali nodi. Fino ad allora non sarà possibile trovare col compasso su di una corda gli intervalli musicali con perfetta precisione.

Poco più di un anno dopo sarà lui stesso a proporre una legge del genere, in una memoria redatta il 9 dicembre 1784 (Fig. 2, p. 263) e letta all'Accademia delle scienze di Montpellier il 16 dicembre dello stesso anno (viene integralmente riprodotta nel Doc. III).

In essa Mercadier afferma che l'entità della correzione è proporzionale al rapporto D^2/F ,¹⁶ ricordando che dalle soprammenzionate esperienze essa risultava dipendere anche da L , si può concludere che egli prende correttamente in esame tutte le variabili che compariranno nel coefficiente b della (1) (il modulo di elasticità E non figura, dato che sono in gioco due porzioni di una stessa corda). Per effettuare in pratica tale correzione procede nel seguente modo:

¹⁴ Montpellier, Archives de l'Hérault, Ms. D.134, cc. 149r-158v: *Mémoire sur les rapports des sons. Dans lequel on prouve par plusieurs expériences, 1°. Que les rapports des consonances exprimés par les longueurs des cordes ne sont que par une approximation variable, les mêmes que ceux qui ont été adoptés par Zarlín et les théoriciens qui sont venus après lui. 2°. Que néanmoins ces derniers rapports sont les seuls qu'on puisse admettre dans la théorie musicale, et qu'ils sont égaux aux rapports inverses des vibrations des cordes qui donnent les consonances justes, quoique les longueurs de ces cordes soient dans des rapports plus petits tout étant d'ailleurs égal (senza data).* A p. 140 della memoria *Sur l'accord du clavecin*, citata in nota 11, Mercadier riferisce che nel luglio 1783 aveva comunicato tale sua scoperta all'Accademia delle Scienze di Parigi, ma che le dimostrazioni sperimentali furono effettuate a Montpellier nel novembre successivo: ciò è confermato dal Doc. I, da cui inoltre si apprende che il 22 luglio 1783 la soprammenzionata memoria era stata consegnata, tramite d'Alembert, a Condorcet. Essa è ancora conservata nell'archivio di detta accademia, come segnalato da A. COHEN, *Music in the French Royal Academy of Sciences* [...], Princeton, Princeton University Press, 1981, p. 93.

¹⁵ Ms. D.134, c. 157v.

¹⁶ Mentre dall'esperienza n. 7 del Doc. II risulta invece – inspiegabilmente – che al crescere del diametro la rigidità diminuisce; errore che del resto viene confermato nella memoria autografa citata in nota 14 (Ms. D.134, c. 152r).

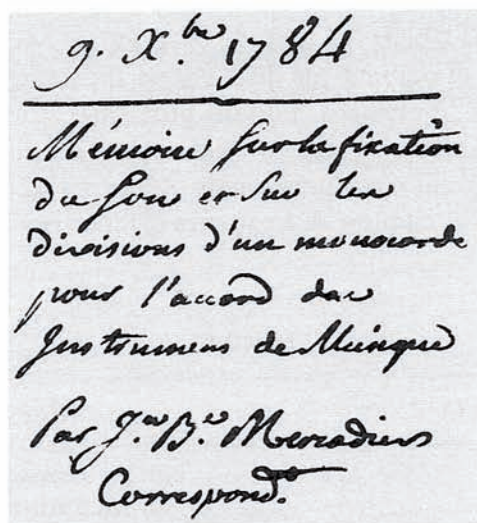


Fig. 2 Intestazione autografa della memoria di Mercadier pubblicata nel Doc. III.

1. tramite il ponticello mobile suddivide la corda di lunghezza L in due parti L_1 e L_2 (con $L_1 > L_2$), in modo che $L_1:L_2$ corrisponda a una delle consonanze più semplici, espressa secondo i rapporti tradizionali della canonica; per maggiore praticità consiglia di servirsi dell'ottava ($L_1=2$, $L_2=1$) o della decimaquinta ($L_1=4$, $L_2=1$);
2. fa scorrere il ponticello mobile di una quantità y , fino a rendere pura la consonanza di cui al punto 1; servendosi di tali valori calcola il parametro $z = y L_2 / (L_1 - L_2)$, ove z è la distanza di un «nodo» dall'estremità ad esso più vicina;
3. chiamata con L la lunghezza totale della corda, tale parametro z permette a Mercadier di effettuare le debite correzioni per un qualunque intervallo musicale; se $L_i:L$ (con $L_i < L$) è il rapporto che individua quest'ultimo secondo la teoria classica, il corrispondente valore corretto si otterrà posizionando il ponticello mobile nel punto

$$L_i + 2z \frac{L - L_i}{L}$$

Ho provato a verificare il suo metodo prendendo come riferimento una corda di acciaio ($L = 600$ mm, $R = 0.5$ mm, $E = 20000$ kg/mm², $\rho = 7800$ kg/m³, $F = 6$ kg) e servendomi del rapporto $L_1:L_2 = 2:1$ per ottenere il valore di y (quest'ultimo – per una maggiore precisione della verifica – è stato calcolato per tentativi con la (1), ed è risultato essere di 1.94 mm).

Come si vede dalla tabella I, il metodo proposto da Mercadier – pur non esatto – permette di ottenere già delle buone approssimazioni nell'ambito dell'ottava: vedi ad esempio la quinta pura, intervallo che senza correzione sarebbe stato affetto da un errore pari a quasi 1/4 di comma sintonico, quantità con cui spesso si temperavano le quinte nei secoli passati (tutti gli scarti sono riferiti ai rapporti di frequenza elencati nella prima colonna).

TABELLA I

INTERVALLO	SCARTO (cents)	
	con la correzione di Mercadier	senza correzione
decimaquinta (4:1)	+ 21.63	+ 57.16
ottava (2:1)	+ 0.23	+ 11.58
sesta maggiore (5:3)	- 0.67	+ 6.87
quinta (3:2)	- 0.81	+ 4.84
quarta (4:3)	- 0.75	+ 3.01
terza maggiore (5:4)	- 0.64	+ 2.18
tono equabile ($\sqrt[6]{2}$:1)	+ 0.30	+ 1.01

Mercadier doveva essersi interessato al problema forse perchè, come abbiamo visto in nota 11, le sue ricerche in campo musicale vertevano soprattutto in un settore della teoria che richiedeva una esatta divisione del monocordo: il temperamento. Da quanto egli stesso fa osservare alla fine del Doc. III, i fenomeni da lui segnalati nella memoria del 1783 furono comunque considerati una semplice «curiosità»: di fronte a questo atteggiamento del mondo scientifico, Mercadier dovette evidentemente arrendersi, dato che i suoi scritti a riguardo caddero rapidamente nell'oblio.

1842 – Nicolas Savart (1790-1853) – da non confondere col più celebre Félix – effettuò dei rilevamenti sperimentali su di una corda incastrata alle estremità, pervenendo a una formula che dà la sua frequenza di vibrazione fondamentale f :

$$f = \sqrt{f_o^2 + f_r^2} \quad (6)$$

ove f_o = frequenza fondamentale emessa da una corda ideale avente le stesse dimensioni;

f_r = frequenza fondamentale della corda dovuta alla sola rigidità ($F = 0$).¹⁷

Sempre nel 1842 la (6) viene ricavata da Jean-Marie Duhamel per via puramente analitica (ma basandosi su semplici considerazioni di carattere fisico e quindi senza impostare l'equazione differenziale di moto).¹⁸ C'è comunque da osservare che in realtà la (6) vale per una corda incernierata – e non incastrata – alle estremità.¹⁹ Fatti i dovuti calcoli, essa risulta inoltre essere approssimabile alla (1); tale approssimazione vale per $\pi^3 n^2 E R^4 \ll 16 L^4 F$, condizione ampiamente verificata nei casi di comune impiego.

1848 – Il tedesco L. F. W. August Seebeck (1805-1849) – inventore della sirena acustica che porta il suo nome e figlio del più celebre Thomas – è il primo a impostare e a risolvere l'equazione differenziale relativa alla corda elastica vibrante, nelle due classiche condizioni di vincolo.²⁰ Per estremi incernierati conferma la soluzione già proposta da Savart e Duhamel, mentre per le condizioni di incastro perviene alla seguente formula approssimata (valevole, come la precedente, per basse rigidità):

$$f_n = n f_o \sqrt{a'} (1 + b n^2) \quad (7)$$

ove b = stesso delle (1) e (2)

$$a' = 1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{2b} + \frac{24}{\pi^2} b$$

¹⁷ N. SAVART, *Recherches expérimentales sur l'influence de l'élasticité dans les cordes vibrantes*, «Annales de chimie et de physique», s. III, vol. VI, 1842, pp. 5-19.

¹⁸ J.-M.-C. DUHAMEL, *Remarque à l'occasion du mémoire de M. le colonel Savart, sur les cordes vibrantes*, «Annales de chimie et de physique», s. III, vol. VI, 1842, pp. 19-21.

¹⁹ Come già fatto rilevare da I. TODHUNTER, *A history of the theory of elasticity and of strength of materials from Galilei to the present time*, ed. by K. Pearson, vol. II, parte I, Cambridge, Cambridge University Press, 1893, pp. 322-323.

²⁰ [L. F. W.] A. SEEBECK, *Über die Schwingungen gespannter und nicht gespannter Stäbe*, «Annalen der Physik und Chemie», LXXIII, 1848, pp. 442-448. Per dare un'idea qualitativa del problema, ricordo che nell'equazione differenziale di moto di una corda rigida compaiono due termini, uno del 2° ordine (dovuto alla tensione applicata dall'esterno) e l'altro del 4° (dovuto all'elasticità propria): la sua soluzione presenta quindi maggiori difficoltà sia rispetto al caso della corda ideale (in cui la forza di richiamo è dovuta alla sola tensione esterna) che a quello della verga vibrante (in cui compare solo il termine dovuto all'elasticità propria). Riguardo poi alle due condizioni di vincolo, c'è da osservare che le loro ripercussioni sull'andamento degli armonici – correttamente individuate da Seebeck – ancora verso la fine del secolo venivano erroneamente esposte in due dei principali trattati di acustica del tempo: cfr. I. TODHUNTER, *loc. cit.* in nota 19.

Come si vede, la (7) differisce dalla (2), formula – anch'essa necessariamente approssimata – proposta da Morse nel 1948 e oggi di comune impiego. Nei casi che normalmente si presentano, e limitatamente ai primi armonici, lo scarto fra le due soluzioni risulta però essere inferiore all'uno per mille.

Il monocordo di cui Seebeck si serviva doveva essere dotato di una corda di rigidità assai bassa, dato che – stando ai coefficienti da lui stesso forniti a p. 448 della memoria citata – lo scarto del 27° armonico era di soli 20.8 cents (e cioè non superiore al comma sintonico).

1851 – Charles Delezenne effettua delle esperienze su di un monocordo, simili a quelle di Mercadier, a lui non note. Pur non aggiungendo nulla di nuovo dal punto di vista concettuale, specifica i diametri delle corde da lui usate e l'entità delle corrispondenti correzioni.²¹

1881 – Il padre domenicano Rosario Alessi – professore di matematica e fisica al seminario di Avellino – annuncia di aver posto in commercio un monocordo portatile destinato a facilitare l'accordatura dei pianoforti e degli organi secondo il temperamento equabile.²² Essendo dotato di una corda di acciaio di forte tempra e per di più assai corta (circa 23 cm), egli precisa – facendo risaltare la novità dell'accorgimento – di avere introdotto una correzione di lunghezza dovuta alla rigidità. Con riferimento alla Fig. 3 (p. 267), Alessi procede nel seguente modo:

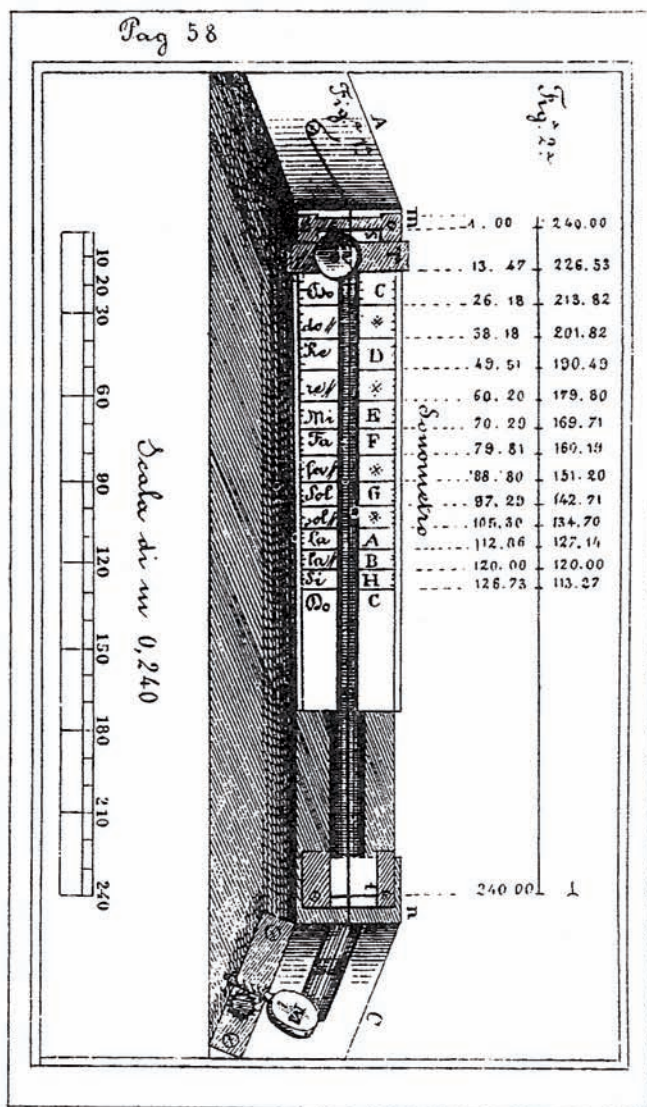
1. partendo dal Do grave, divide in due parti uguali la sua lunghezza vibrante (= 226.53 mm), ottenendo un Do acuto (= 113.27 mm), il quale però – a causa della rigidità della corda – non è perfettamente all'ottava;
2. fra questi due punti inserisce 11 medi geometrici, secondo quanto richiesto dal temperamento equabile;
3. il ponte inferiore, che inizialmente era posto in corrispondenza della lettera *t* (= 240.00 mm), viene poi fatto slittare verso il basso fino a rendere pura l'ottava formata dai due Do di cui al punto 1; l'entità di tale correzione si aggira intorno ai 4 mm, e detto ponte viene definitivamente posizionato in corrispondenza della lettera *n*.

Per una soluzione matematicamente ineccepibile, Alessi avrebbe però dovuto lasciare fisso il ponte inferiore e – come già aveva cercato di fare Mercadier – calcolare il posizionamento esatto delle tacche corrispondenti

²¹ Cfr. H. BOUASSE, *Acoustique. Cordes et membranes* [...], Paris, Delagrave, 1926, pp. 128-131.

²² R. ALESSI, *Sonometro. Misura matematica del suono musicale. Metodo teorico-pratico per la giusta divisione della scala cromatica con apposito apparecchio per accordare i pianoforti, e gli organi*, Napoli, Morano, 1881, pp. 65-67, Tav. VIII (rappresentante il suo sonometro).

TAV. VIU



La vendita di questo apparecchio secondo l'annuncio di giornali

Fig. 3 Sonometro di Alessi (1881). Il ponticello scorrevole T, munito della vite a manopola V, permette di regolare la lunghezza vibrante della corda senza che la sua tensione venga alterata.

a ciascuno dei dodici semitoni figuranti sul sonometro: la correzione da lui trovata per il Do acuto risulta infatti essere eccessiva se estesa anche alle note più gravi. Ho effettuato un controllo numerico del procedimento di Alessi prendendo come riferimento la stessa corda già impiegata per calcolare la tabella I; il risultato conferma che le frequenze così ottenute sono leggermente calanti. Ecco gli scarti in cents rispetto ai valori esatti, scarti che – come si può constatare – nel caso esaminato sono comunque sempre inferiori al cent:

C	C $\sharp$	D	D $\sharp$	E	F	F $\sharp$	G	G $\sharp$	A	A $\sharp$	B	C
0.00	-0.20	-0.39	-0.56	-0.70	-0.81	-0.88	-0.91	-0.88	-0.78	-0.61	-0.35	0.00

Da notare che, avendo Alessi effettuato la correzione sull'ottava Do-Do, tali scarti aumentano di mano in mano che ci si sposta verso la zona centrale di detta ottava. Se poi egli avesse continuato a suddividere il suo sonometro anche oltre il Do acuto, essi avrebbero invece assunto valori positivi e di entità decisamente inaccettabile.

1948 – Philip M. Morse espone in dettaglio la soluzione dell'equazione generale di moto di una corda rigida avente le estremità incastrate.²³ Contrariamente al caso della corda ideale e delle verghe, essa però non si presenta sotto forma di una formula finale che sia facilmente impiegabile dal punto di vista operativo. A tale scopo ricava pertanto l'espressione approssimata (2), che oggi è di comune impiego.

1989 – Servendosi dell'equazione generale, Hideo Suzuki calcola numericamente le esatte frequenze degli armonici emessi da una corda rigida, evidenziando che le (1) e (2) offrono soluzioni accettabili per rigidità corrispondenti a un $b < 0.01$.²⁴ Al di sotto di tale limite, le sue tabelle confermano inoltre che il fattore di inarmonicità I'_n – calcolato con la (3') – è pressochè indipendente dalle condizioni di vincolo; per $b > 0.01$ esso risulta invece essere maggiore nel caso di estremi incernierati, analogamente a quanto del resto si verifica nelle verghe vincolate in modo analogo. Sviluppando un'idea di F. Miller jr. (1949), Suzuki illustra infine un metodo per ridurre sensibilmente l'inarmonicità di una corda, fissando ad essa una piccola massa concentrata in un punto situato in prossimità di una delle estremità.

²³ P. M. MORSE, *Vibration and sound*, New York [...], McGraw-Hill, 1948, pp. 166-170, 2ª ed.

²⁴ H. SUZUKI, *Control of inharmonicity by the addition of a point mass*, «Journal of the Acoustical Society of Japan (E)», X/5, 1989, pp. 253-259.

3. Cembali e pianoforti

3.1. Inarmonicità dovuta alle risonanze della struttura costituita da ponticello e tavola armonica

Finora avevamo supposto che le estremità della corda fossero fisse. Negli strumenti musicali – come ad esempio cembali, pianoforti, liuti e chitarre – non è però così: il ponticello posto sulla tavola armonica può oscillare, e con esso il corrispondente punto di attacco della corda. Già nel 1894, operando su di un modello fisico schematizzato, Rayleigh aveva risolto matematicamente il problema.²⁵ Chiamando con f_{cn} la frequenza del generico armonico n della corda e con f_{pm} quella del generico modo di vibrazione m del complesso ponticello – tavola armonica, si può dimostrare che:

1. gli armonici della corda per i quali vale la disuguaglianza $f_{cn} < f_{pm}$ subiscono un abbassamento di frequenza;
2. quelli per cui vale $f_{cn} > f_{pm}$ invece si inacuscono; al tendere di f_{pm} a zero, e cioè al crescere dell'inerzia della struttura, il supporto tende a ritornare nelle condizioni in cui può essere considerato fisso.

In entrambi i casi, l'entità di tale scostamento è tanto più elevata quanto più stretto è l'accoppiamento tra corda e ponticello, e quanto più prossime sono fra loro la f_{cn} e la f_{pm} .

Qualora la corda sia non ideale, alle inarmonicità dovute alla sua rigidità si aggiungeranno quindi quelle di origine strutturale ora esaminate, la cui entità può assumere ordini di grandezza anche preponderanti. Negli strumenti musicali l'andamento degli armonici sarà inoltre piuttosto irregolare, a causa del variare delle configurazioni assunte dalla coppia f_{cn} , f_{pm} (Fig. 4, p. 272); se infine si riaccordasse lo strumento a un differente corista, tali configurazioni varierebbero, facendo così variare anche il suo timbro.²⁶

I fenomeni cui si è accennato sono particolarmente evidenti negli strumenti da tasto di antica fattura, a causa – come confermano alcuni rilevamenti sperimentali che tra poco esamineremo – della minore impedenza offerta dal ponticello e dei più pronunciati picchi di risonanza della tavola

²⁵ J. W. STRUTT Lord RAYLEIGH, *The theory of sound*, I, London, Macmillan, 1894, pp. 200–204. Sull'argomento cfr. anche N. H. FLETCHER–T. D. ROSSING, *The physics of musical instruments*, New York, Springer-Verlag, 1990, pp. 48–50, 112–114.

²⁶ Cfr. A. H. BENADE, *Fundamentals of musical acoustics*, Mineola, Dover, 1990², p. 318. L'irregolarità dell'andamento degli armonici di un pianoforte risulta evidente dai rilevamenti di J. LATTARD, *Influence of inharmonicity on the tuning of a piano. Measurements and mathematical simulation*, «The Journal of the acoustical society of America», XCIV, 1993, pp. 46–53 : 49.

armonica. Per i pianoforti dell'Ottocento e del primo Novecento un altro fattore che favorisce tale tipo di inarmonicità è dovuto all'adozione del cosiddetto principio 'della risonanza': i fabbricanti di quel periodo cercavano infatti di avvicinarsi alla condizione $f_c = f_p$ (riferita alle frequenze fondamentali).²⁷ Uno di questi, Giacomo Ferdinando Sievers, in un manuale del 1861 ad esempio asserisce esplicitamente che la porzione di tavola armonica corrispondente a ciascun 'La' della tastiera doveva venire 'accordata' in modo che – dopo la verniciatura e il montaggio delle corde – essa si venisse a trovare il più possibile all'unisono con la frequenza corrispondente a detto La. Ciò, presso Sievers e gli altri costruttori di pianoforte del secolo scorso, veniva ottenuto assottigliando opportunamente la tavola di mano in mano che si scendeva verso il grave; dopo averla fissata al telaio, la sua accordatura veniva controllata percuotendola leggermente in corrispondenza del ponticello – «come se fosse un timpano, una gran cassa od un tamburo» – e dando gli ultimi ritocchi agendo sulle catene.²⁸

Il 'principio della risonanza' della tavola armonica non doveva comunque essere nuovo a quell'epoca, dato che – pur portando a diverse conclusioni – si incontra già in un trattato francese del 1680.²⁹ Ovviamente la sua realizzazione pratica era solo approssimativa, essendo in larga misura basata sull'esperienza e sulle doti di previsione dell'artigiano addetto a tale operazione. Del resto, anche se una perfetta uguaglianza tra f_c e f_p potesse essere realizzata, si verificherebbe che anche in questo caso – qualora l'accoppiamento tra corda e struttura fosse stretto – la f_p tenderebbe a mandare fuori risonanza la f_c e si ricadrebbe quindi in uno dei due casi esposti all'inizio del presente paragrafo.³⁰

²⁷ Cfr. N. GRAVAGNE, *Soundboard*, in *Encyclopedia of keyboard instruments. Vol. I: The piano*, ed. by R. Palmieri, New York - London, Garland, 1994, pp. 358-363 : 361.

²⁸ G. F. SIEVERS, *Il pianoforte. Guida pratica per costruttori [...]*, Napoli, Ghio, 1868, pp. 91, 96-97.

²⁹ Cfr. C. PERRAULT, *Essays de physique ou recueil de plusieurs traités touchant les choses naturelles*, I, Paris, Coignard, 1680, p. 134. Secondo la teoria ivi esposta, la risonanza della tavola armonica raggiungerebbe il valore ottimale quando il suo spessore – punto per punto – è proporzionale alla lunghezza delle corde. È per questa ragione, secondo Perrault, che i cembalari del tempo assottigliavano detta tavola in corrispondenza della regione acuta: «on observe, que de mesme qu'une corde ne sonne pas bien, si elle n'est pas parfaitement égale, la table ne resonance pas aussi quand elle n'est pas partout d'une épaisseur uniforme & proportionnée à la longueur des cordes qui luy respondent quand l'instrument a des cordes de longueurs différentes, comme le Clavessin. C'est pourquoy les Ouvriers ont de coustume de faire passer les tables qu'ils font pour les Luts entre deux barres de fer axactement paraleles, pour estre assurez qu'elles sont égales par tout; & pour les Clavessins ils prennent garde de les rendre plus minces au droit des petites cordes». Tale sua affermazione trova ad esempio riscontro nei cembali fiamminghi, la cui tavola armonica ha uno spessore di 4.3÷4.5 mm nei bassi e di 1.5÷2.5mm negli acuti: cfr. G. O'BRIEN, *Storia della costruzione del clavicembalo*, «Musica antica», II, 1990, pp. 19-24.

³⁰ Cfr. C. E. GOUGH, *The theory of string resonances on musical instruments*, «Acustica», XLIX, 1981, pp. 124-141.

Sempre con riferimento alle inarmonicità di origine strutturale, c'è infine da ricordare che i primi rilevamenti sperimentali furono effettuati da C. Karp nel 1986, su alcuni pianoforti e cembali conservati nello SMS-Musikmuseet di Stoccolma.³¹ Le figure 4a, 4b, 4c – che ora esamineremo – riportano alcuni di tali rilevamenti.

Fig. 4a – È relativa a un cembalo Sperrhake, costruito verso il 1965 con criteri ancora legati all'industria del moderno pianoforte. Si è provato ad appoggiare un peso di 10 kg sulla porzione di ponticello su cui insiste la corda sotto esame: a causa del conseguente aumento dell'inerzia, le f_{pm} si sono abbassate e la nuova situazione è risultata corrispondere al caso 2 ($f_{cn} > f_{pm}$).

Fig. 4b – È relativa a un moderno pianoforte a coda Blüthner (c. 1930). Bloccando meccanicamente il complesso ponticello-tavola, il punto di appoggio della corda diventa quasi fisso (f_{pm} che tendono a zero), per cui le varie f_{cn} si innalzano fino a coincidere con quelle di una corda reale incastrata su supporti fissi (ciò suggerisce che il tipo di vincolo tra corda e ponticello sia effettivamente quello di incastro). Da notare inoltre che i meno pronunciati picchi di risonanza delle f_{pm} di un pianoforte moderno fanno sì che l'andamento delle f_{cn} sia più regolare rispetto a quello di Fig. 4a.

Fig. 4c – Pone in confronto il Blüthner ora esaminato con un pianoforte a coda Erard del 1811, dotato di telaio di legno e corde originali. Da notare, nella regione grave di quest'ultimo, la pendenza negativa del tratto iniziale delle curve di inarmonicità: ciò porta, contrariamente a quanto finora visto, a una contrazione degli armonici.³²

3.2. Ripercussioni sui criteri di accordatura

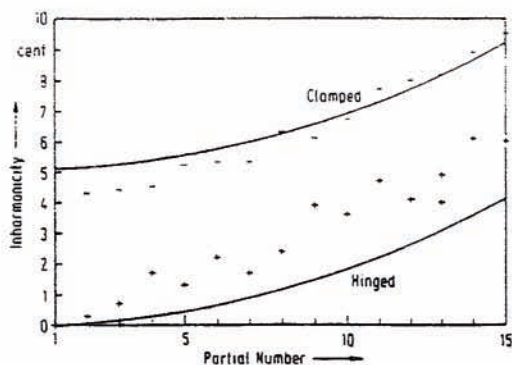
La maggiore inarmonicità delle corde poste ai due estremi della tastiera,³³ fa sì che le ottave situate in quelle zone, se si vogliono minimizzare i battimenti fra gli armonici più emergenti, debbano essere accordate progressivamente sempre più larghe del rapporto 2:1 (operazione che in lingua inglese è efficacemente identificata col termine «octave stretching», cioè «stiramento delle ottave»). Con riferimento alla Fig. 5 (p. 273),³⁴ si vede

³¹ C. KARP, *The inharmonicity of string keyboard instruments*, «Acustica», LX, 1986, pp. 295-299.

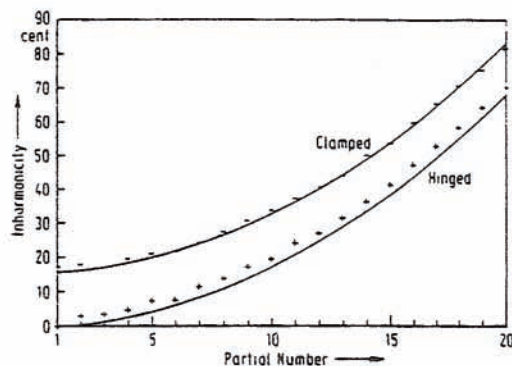
³² Come anche risulta da un rilevamento effettuato su di un cembalo di Felix Wolff (1976), copia di un originale del secolo XVIII (*Ibid.*, p. 297).

³³ Cfr., più avanti, nota 44.

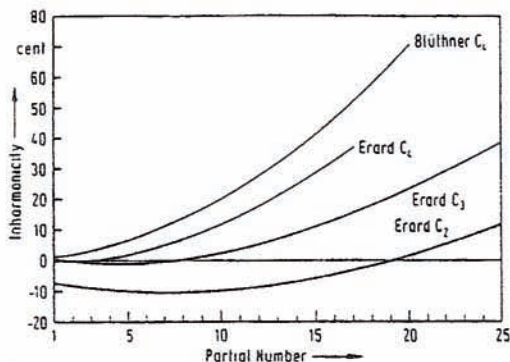
³⁴ Tratta da D.W. MARTIN-W.D. WARD, *Subjective evaluation of musical scale temperament in pianos*, «The Journal of the acoustical society of America», XXXIII, 1961, pp. 582-585:583.



a. Cembalo Sperrhake (nota Do_3). Col segno + sono stati contrassegnati i rilevamenti relativi allo strumento in condizioni normali, mentre col segno - quelli effettuati dopo aver ridotto la mobilità del complesso costituito del ponticello e tavola armonica. Le due curve a tratto continuo sono state calcolate, servendosi della formula (3), nelle condizioni di estremi incernierati (*hinged*) e incastrati (*clamped*).



b. Pianoforte Blüthner (nota Do_3). Stessi criteri di lettura.



c. Pianoforti Erard e Blüthner. Curve di interpolazione dei rilevamenti relativi ad alcune note (il C_2 corrisponde al nostro Do_1). La retta parallela all'asse delle ascisse indica la condizione $I_n = 0$.

Fig. 4 Da Karp, 1986. Andamento del fattore di inarmonicità I_n , espresso in cents, in funzione del generico armonico n .

ad esempio che volendo accordare il fondamentale del Do_6 col secondo armonico del Do_5 , l'intervallo di ottava formato da tali due note dovrà risultare un po' più largo del 'giusto' rapporto di frequenza 2:1; a causa del crescere dell'inarmonicità, tale incremento sarà ancora maggiore passando poi ad accordare l'ottava Do_6 - Do_7 . Considerazioni analoghe valgono per i bassi. Sempre con riferimento alla Fig. 5, c'è da aggiungere che l'andamento a zig-zag della curva di accordatura di un pianoforte è dovuta alle irregolarità dell'andamento degli armonici (di cui si è già parlato) e alla loro disuniforme intensità acustica, specie nei bassi: ciò infatti induce l'accordatore a cercare, per ogni singola nota, una soluzione di compromesso.³⁵

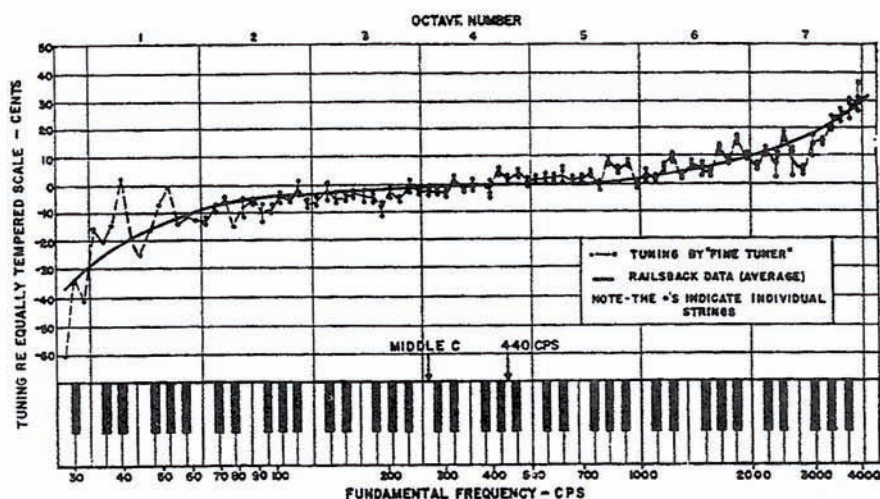


Fig. 5 Da Martin e Ward, 1961. Scarti, rispetto ai valori teorici del temperamento equabile, dell'accordatura di un pianoforte verticale di piccole dimensioni. La curva a tratto continuo è stata invece ottenuta da Railsback (1938) facendo una media degli analoghi scarti relativi a sedici differenti pianoforti.

³⁵ H. L. F. HELMHOLTZ, *On the sensation of tone* [...], London, Longmans, 1885, p. 80, ad esempio riferisce che – in seguito alla tecnica costruttiva adottata – negli acuti era predominante il primo armonico, mentre nei bassi avevano maggiore intensità il secondo e il terzo (osservazione del resto valida anche per gli odierni pianoforti). Sull'effettiva attitudine dell'orecchio umano a percepire l'inarmonicità di un dato suono cfr. B. C. J. MOORE-R. W. PETERS-B. R. GLASBERG, *Thresholds for the detection of inharmonicity in complex tones*, «The Journal of the acoustical society of America», LXXVII, 1985, pp. 1861-1867.

Altri due fattori concorrono però a determinare l'andamento di tale tipo di grafico:

1. In corrispondenza dell'estremo grave e acuto della scala musicale, l'orecchio umano – in maggiore o minore misura – giudica leggermente strette le ottave 'fisiche', cioè quelle il cui rapporto di frequenza corrisponde al 'giusto' valore 2:1; ciò trova conferma nel fatto che – com'è emerso da alcuni rilevamenti acustici – oboisti, flautisti e violinisti tendono naturalmente ad allargare tali ottave quando eseguono degli 'a solo'.³⁶ Tale '*stretching* soggettivo' delle ottave non è però realizzabile negli strumenti da tasto in cui esso può creare delle dissonanze dovute all'interferenza fra gli armonici, come ad esempio negli organi a canne; esso è invece realizzabile nei pianoforti, dato che risulta essere quasi coincidente con quello richiesto dall'inarmonicità delle corde e anche grazie al rapido decadimento dell'intensità sonora delle singole note. Oltre a ciò si è notato che, con un'accordatura basata sulle ottave 'fisiche' di 2:1, l'accompagnamento nel grave di una melodia suonata all'estremo acuto della tastiera sarebbe giudicato 'crescente' dagli ascoltatori.³⁷ Nei moderni pianoforti – essendo dotati di una tastiera di notevole estensione – quest'ultimo fattore assume una notevole rilevanza, e ciò prescindendo dall'inarmonicità: dall'esame della Fig. 5 (p. 273) si rileva infatti che due note poste alla distanza di sette ottave – distanza che è ben superiore alla portata acustica degli armonici della nota grave – risultano avere subito uno *stretching* complessivo di circa un semitono, eppure l'orecchio le giudica in consonanza.
2. Esaminando le accordature effettuate da tre diversi professionisti su alcuni strumenti del museo citato nel §3.1, Karp rileva che essi avevano impiegato lo *stretching* delle ottave solamente sui pianoforti (ivi compresa la regione grave dell'Erard di Fig. 4c, dove la pendenza negativa delle curve di inarmonicità a rigore avrebbe dovuto dare luogo a delle ottave contratte); nei cembali tutte le ottave osservavano invece quasi esattamente il 'giusto' rapporto di frequenza 2:1.³⁸ Si vede quindi che nel processo di accordatura intervengono anche delle componenti che potremmo definire 'psicologico-culturali', legate cioè alla particolare identità dello strumento su cui si opera, invece che a parametri puramente fisici o fisiologici.

³⁶ Cfr. J. E. F. SUNDBERG-J. LINQVIST, *Musical octaves and pitch*, «The Journal of the acoustical society of America», LIV, 1973, pp. 922-929.

³⁷ Cfr. E. TERHARDT-M. ZICK, *Evaluation of the tempered tone scale in normal, stretched, and contracted intonation*, «Acustica», XXXII, 1975, pp. 268-274.

³⁸ C. KARP, *The inharmonicity* cit., p. 298.

Con riferimento a quest'ultima constatazione, Karp si chiede se anche verso la fine del Settecento – vale a dire nel periodo di transizione tra cembalo e pianoforte – gli accordatori effettuassero la soprammenzionata distinzione. Le fonti storiche che ora esamineremo permettono di dare una risposta negativa a tale interrogativo, dato che lo *stretching* delle ottave risulta fosse praticato dagli abili accordatori di cembalo almeno dalla metà del Settecento.

Una prima testimonianza si ha da parte di J. C. Petit, in un metodo da lui pubblicato verso il 1740. Egli infatti prescrive un procedimento di accordatura delle ottave che – sia pure indirettamente – porta ad avere un po' larghe quelle situate nella zona grave e acuta della tastiera. La prima ragione di ciò – spiega – è dovuta al fatto «che c'è sempre da temere che le note più gravi del [registro di] contrabbasso siano troppo alte rispetto alle note più acute del [registro di] soprano»: posta in questi termini, quella di Petit costituirebbe dunque anche la prima testimonianza relativa a una valutazione 'soggettiva' delle ottave.³⁹ Pochi anni dopo, nel 1753, Michel Corrette confermerà in modo esplicito che la pratica degli abili costruttori era conforme a tali criteri:⁴⁰

Pour la grande perfection de l'accord du Clavecin il faut tenir les Octaves des dessus un peu plus fermes que les autres, le contraire pour les ravalements d'en bas, mais que cela soit imperceptible. Ce que les habiles facteurs observent très bien.

Per una grande perfezione dell'accordatura del clavicembalo bisogna tenere le ottave degli acuti un po' più ferme [= crescenti] rispetto alle altre, mentre il contrario vale per le note più gravi della tastiera, ma che ciò sia impercettibile. Cosa che gli abili costruttori osservano assai bene.

³⁹ J. C. PETIT, *Apologie de l'excellence de la musique. Avec un nouveau système, & méthode demonstrative pour accorder le clavessin et l'orgue, &c. par un système plus parfait & plus complet que tout ce qui a été usité jusqu'à présent*, Londres, l'auteur, [c. 1740], pp. 31-32 (l'opuscolo è bilingue, francese-inglese): «Pour bien accorder les Octaves, en sorte que tous les Tons de la 'Contrebasse' soient bien justes avec les Tons les plus hauts du 'Dessus', il faut bien observer de finir les Tons en bas, plutôt en remontant la Corde qu'en descendant, afin que l'Octave soit de toute sa longueur, & cela pour deux Raisons principales. La première Raison, parce qu'il est toujours à craindre que les Tons les plus bas de la Contrebasse soient trop hauts, contre les Notes les plus hautes du Dessus [= First because it is always to be feared, that the lowest Tones of the Counter-bass will be too high for the upper notes]. La seconde Raison, parce que les Cordes d'en bas, & les Cheilles auront autrement du penchant à remonter, sur-tout dans les Changements de Temps; & tout le contraire doit être observé en accordant les Octaves en montant, cest-à-dire, qu'il faut finir en descendant la Corde, afin de donner toute l'Octave complete; & parce-que les Cordes en haut (au moindre Changement de Temps) ont de l'inclination à descendre (sur tout dans le Temps chaud) parce-que le Bois se restère, & les plus hautes & petites Cordes par conséquent baissent aisément, a cause de leurs très petites Dimensions».

⁴⁰ M. CORRETTE, *Le maître de clavecin*, Paris, l'auteur, Bayard, Leclerc, 1753, p. 87.

Lo *stretching* delle ottave verrà comunque quasi sistematicamente menzionato solo a partire dal tardo Ottocento, periodo in cui affiorano anche alcune divergenze di idee riguardanti l'estensione della sua applicazione: nei manuali di V. Avoni (1894) e di Luigi E. Bongioanni (1908) esso è ad esempio prescritto sia negli acuti che nei bassi, mentre l'americano J. Cree Fisher (1907) mostra invece di preferirlo solo negli acuti.⁴¹ Nessuno di questi autori precisa comunque se tale pratica fosse dovuta all'inarmonicità delle corde o al fenomeno delle ottave 'soggettive'. Benchè i pratici ne avessero già da tempo intuito l'esistenza – vedi ad esempio la inequivocabile testimonianza di Petit, poco sopra citata – le prime indagini scientifiche riguardanti quest'ultimo fenomeno furono effettuate da Stumpf e Meyer nel 1898.⁴²

Per quanto più specificamente concerne le ricerche analoghe riguardanti il pianoforte, bisognerà invece attendere i rilevamenti sperimentali di O. L. Railsback, pubblicati nel 1938.⁴³ Cinque anni dopo, nel 1943, due altri ricercatori americani calcoleranno con esattezza il grado di inarmonicità delle corde di tale strumento, facendo rilevare che ciò può provocare anche errori nell'ambito della stessa ottava nella quale gli accordatori realizzano il riparto del temperamento equabile.⁴⁴ Le quinte e le quarte, i cui battimenti sono da questi ultimi valutati ad orecchio sulla base di tabelle che non tengono conto dell'inarmonicità, risultano infatti essere affette da errori di circa un cent (quantità più che sensibile, se si pensa che tali due intervalli dovrebbero essere temperati – rispettivamente in calare e in crescere – di due cents): dato che però il riparto viene realizzato per quinte ascendenti e quarte discendenti, tali errori si compensano parzialmente, raggiungendo un massimo di due cents per la nota più sfavorita.

Dal punto di vista storico, c'è da far osservare che un metodo di accordatura che potrebbe trovare una sua parziale giustificazione sulla base di quanto ora detto è quello reiteratamente proposto – dal 1778 al 1824 – da Pierre-Joseph Joubert de La Salette: tale autore – poi seguito dal solo

⁴¹ V. AVONI, *L'accordatore di pianoforti* [...], Leipzig, Geidel, 1894, p. 57; J. CREE FISCHER, *Piano tuning*, Philadelphia, 1907 (reprint New York, Dover, 1975), pp. 159–160; L. E. BONGIOANNI, *Norme per l'accordatura dei pianoforti*, Torino, Capra, 1908, p. 100.

⁴² Cfr. M. KOLINSKI, *A new equidistant 12-tone temperament*, «Journal of the American musicological society», XII, 1959, pp. 210–214: 211.

⁴³ Cfr. O. H. SCHUCK-R. YOUNG, *Observations on the vibrations of piano strings*, «The Journal of the acoustical society of America», XV, 1943, pp. 1–11: 8–9.

⁴⁴ *Ibid.*, p. 9. A p. 6 compare un grafico che riporta, fino al quarto armonico, il fattore di inarmonicità delle corde di un pianoforte a coda; da esso risulta che gli accordatori, per realizzare il riparto dell'ottava, non scelgono la zona avente la minima inarmonicità. Per una impostazione matematica del problema cfr. J. LATTARD, *Influence of inharmonicity* cit.

Bonifazio Asiola (1827) – pretendeva infatti di realizzare il riparto dell'ottava, relativo al comune temperamento equabile, tramite una catena di quarte pure ascendenti intercalate da ottave discendenti.⁴⁵ È da ritenere che in detto procedimento dovessero però intervenire delle componenti di tipo psicofisico, perchè – anche ammettendo un'inarmonicità pari a quella di un moderno pianoforte – una quarta priva di battimenti risulterebbe crescente di un solo cent rispetto al rapporto 4:3. Benchè per tale inusitata proposta La Salette sia stato ai suoi tempi addirittura ridicolizzato, c'è da sottolineare – anche alla luce di alcune sue osservazioni – che l'intervallo di quarta non sembra da lui essere stato scelto a caso: se infatti si fosse servito di quinte pure, egli si sarebbe posto su di una strada che – invece di avvicinarlo – lo avrebbe allontanato dal temperamento propostosi.⁴⁶

3.3. Il temperamento equabile 'a quinte pure'

È opportuno infine ricordare che lo *stretching* delle ottave ha fatto anche nascere l'idea di un nuovo tipo di temperamento equabile, sempre applicabile alle comuni tastiere. Benchè – come poi vedremo – le sue radici storiche risalgano almeno al secolo XIX, esso fu per la prima volta quantitativamente descritto da Mieczyslaw Kolinski nel 1959.⁴⁷ Esaminiamo brevemente di che cosa si tratta (tutti i valori in cent sono stati approssimati al secondo decimale).

1. Supponiamo inizialmente di servirci solo di quinte e ottave pure, rispondenti – rispettivamente – ai rapporti 3:2 (= 701.96 cents) e 2:1 (= 1200.00 cents). È noto che in tal caso la catena ascendente di quinte

$$C_1 - G_1 - D_2 - A_2 - E_3 - B_3 - F\sharp_4 - C\sharp_5 - G\sharp_5 - D\sharp_6 - A\sharp_6 - E\sharp_7 - B\sharp_7$$

dovrebbe dar luogo a un $B\sharp_7$ più acuto del C_8 di una quantità pari al comma pitagorico, cioè 23.46 cents.

2. Se su di una comune tastiera si vuole realizzare un temperamento equabile avente tutte le ottave pure – come nelle accordature di cembalo segnalate da Karp – ciascuna delle 12 quinte della catena dovrebbe essere ristretta di $23.46/12 = 1.96$ cents, portandosi a 700.00 cents: il $B\sharp_7$ scende-

⁴⁵ Sull'argomento cfr. BARBIERI, *Acustica* cit., pp. 267-269. Analogo sembra fosse il metodo di Giovanni Battista Vitali (*ivi*, p. 183).

⁴⁶ La Salette fa alcune osservazioni – come ad esempio che accordando una quinta pura e una quarta anch'essa pura l'ottava risultante è crescente – spiegabili solo sulla base dell'inarmonicità delle corde. Ciò potrebbe anche in parte giustificare il procedimento di Albert Dolmetsch, accordatore della casa Erard, che si serviva di quinte battenti in calare e quarte prive di battimenti (*ivi*, p. 268).

⁴⁷ Cfr. KOLINSKI, *op. cit.*

rebbe quindi fino a trovarsi all'unisono col C_8 e ciascuno degli 84 ($= 12 \times 7$) semitoni compresi in tale ambito si troverebbe ad avere un'ampiezza pari a $12 \times 700.00 / 84 = 100.00$ cents.

3. Il nuovo temperamento risolve invece il problema adottando l'unica alternativa rimasta, lasciando cioè intatta la catena delle 12 quinte pure e allargando di $23.46/7 = 3.35$ cents ciascuna delle 7 ottave comprese nell'ambito $C_1 - C_8$, ottave che diverrebbero quindi di 1203.35 cents: in conseguenza di ciò il C_8 salirebbe fino a trovarsi all'unisono col $B\#_7$ e ciascuno degli 84 semitoni compresi in tale ambito si troverebbe questa volta ad avere un'ampiezza pari a $7 \times 1203.35 / 84 = 100.28$ cents. A tale riguardo c'è da osservare:

- tutte le ottave vengono temperate, ma solo sotto l'aspetto fisico, rimanendo di fatto consonanti dal punto di vista psicofisico;
- pur essendo costituito da quinte pure ($7 \times 100.28 = 701.96$ cents), le terze e le seste di tale sistema non risultano essere di tipo pitagorico, ma solo leggermente più ampie di quelle del temperamento equabile 'fisico': la terza maggiore è ad esempio di $100.28 \times 4 = 401.12$ cents, mentre il suo rivolto – la sesta minore – è di $100.28 \times 8 = 802.23$ cents;
- lo scarto di un intervallo musicale rispetto al suo omologo dell'equabile 'fisico' aumenta al crescere del numero n di semitoni che compongono detto intervallo, essendo quest'ultimo pari a $100.28 \times n$ cents; in sede sperimentale detti scarti sono comunque stati giudicati accettabili;
- dato che l'ottava non conserva il rapporto 2:1, il temperamento di ogni singolo intervallo non coincide più – in valore assoluto – con quello del suo rivolto; la quinta rimane ad esempio pura, mentre la quarta viene allargata di 3.35 cents.

Benchè più volte sperimentato con successo nella pratica, tale temperamento può essere criticato per il fatto che – oltre a presentare un'ulteriore alterazione delle terze e seste, già piuttosto sensibile nell'equabile tradizionale – tutte le sue ottave vengono allargate della stessa quantità. Sappiamo invece che – per ragioni legate all'inarmonicità e ai soprammenzionati fenomeni psicoacustici – lo *stretching* dovrebbe invece maggiormente addensarsi nelle ottave situate agli estremi della tastiera: nel nuovo temperamento, il grafico di Fig. 5 si trasformerebbe infatti in una retta avente una pendenza di 3.35 cents per ottava; sulle sette ottave – inoltre – si avrebbe uno *stretching* complessivo di soli 23.46 cents, contro i circa 60 rilevabili dalla Fig. 5. L'unica contropartita sarebbe quella di avere tutte le quinte pure, mentre col metodo tradizionalmente impiegato dagli accordatori di pianoforte – come già nel 1908 aveva fatto rilevare il ma-

nuale di Bongioanni – le quinte pure si vengono a trovare solo in prossimità degli estremi della tastiera.⁴⁸

Sui precedenti storici di tale temperamento, già nel 1806 Charles Stanhope riferisce che alcuni accordatori, «al fine di salvaguardare le quinte, hanno assai impropriamente proposto di accordare un po' 'imperfette' le ottave»; egli però non specifica altro, salvo far rilevare che «se allarghiamo le ottave per migliorare le quinte, ciò danneggia le terze».⁴⁹ La pratica del soprammenzionato temperamento equabile a quinte pure doveva comunque risalire proprio al secolo scorso, perchè Serge Cordier – che nel 1974 ce ne offre una ulteriore descrizione – afferma di averlo appreso da un vecchio accordatore di Parigi, al quale a sua volta era stato tramandato per tradizione orale. Noto come «metodo Pleyel», veniva da tale scuola di accordatori realizzato ritoccando leggermente una procedura per terze e seste già impiegata per il temperamento equabile di tipo tradizionale.⁵⁰

4. Strumenti da manico

4.1. Chitarra e strumenti simili

Per un esatto posizionamento dei tasti bisogna tener conto di due fattori:

1. Analogamente a quanto già fatto osservare nel §1 per il monocordo, il primo di essi è dovuto all'inarmonicità. Date due corde di pari lunghezza e di differente diametro, dalla (1) risulta che riducendo della stessa percentuale la loro lunghezza, la corda avente diametro maggiore subirà un maggiore incremento percentuale di frequenza rispetto alla rimanente.
2. Adottando un sintetico termine anglosassone, il secondo fattore è invece dovuto al *detuning*. Premendo ciascuna delle corde di tali strumenti in corrispondenza di uno stesso tasto, si verifica un incremento della tensione specifica – dovuto al leggero allungamento da esse subito – che in pratica risulta essere uguale per tutte; il corrispondente incre-

⁴⁸ BONGIOANNI, *op. cit.*, p. 100: sia nei bassi che negli acuti «le quinte devono accostarsi sempre più alla quinta giusta».

⁴⁹ C. STANHOPE, *Principles of the science of tuning instruments with fixed tones*, London, Wilson, 1806, p. 9: «Some tuners, however, in order to assist the quintes, have very improperly proposed to tune the octaves a little imperfect. The objections to this method are obvious. For, if we sharpen the octaves to assist the quintes, it injures the thirds».

⁵⁰ S. CORDIER, *L'accordage des instruments à clavier*, «G.A. M., Bulletin du Groupe d'Acoustique Musicale», n. 75, novembre 1974, pp. 16-17.

mento relativo di frequenza sarà però maggiore per le corde gravi, dato che – essendo per ragioni di accordatura meno tese di quelle acute – esse presenteranno anche un maggiore incremento relativo di tensione specifica.

Entrambi questi fattori possono essere in larga misura compensati con i seguenti due accorgimenti, il primo dei quali è quello oggi impiegato:

1. montando il ponticello in posizione leggermente obliqua rispetto al capotasto, in modo che la lunghezza vibrante delle corde gravi superi di qualche millimetro quella delle corde acute;
2. adottando lo stesso principio, ma questa volta montando progressivamente sempre più obliqui i singoli tasti.

L'entità di tale compensazione cresce al crescere del modulo di elasticità longitudinale E , come ad esempio si verifica passando dalle corde di budello a quelle di acciaio.⁵¹

Esauriti questi brevi richiami di carattere tecnico, esaminiamo ora le testimonianze storiche – in verità piuttosto scarse – relative a tale problema.

1543 – Silvestro Ganassi è il primo autore che prescrive una compensazione della posizione dei tasti, da effettuarsi prevalentemente ad orecchio; le ragioni da lui adottate sono da ascriversi sia alle irregolarità delle corde che al *detuning*. Per il secondo tasto, che lui fa corrispondere in linea teorica agli 8/9 della lunghezza della corda, cerca anche di precisare l'entità della compensazione dovuta al secondo dei due fattori citati: dice infatti di spostarlo in alto di una quantità pari allo spessore del tasto stesso, e ciò perchè premendo la corda sul tasto «la si vien a forzar alquanto di quello che battendola vuota la non si vien a forzare».⁵²

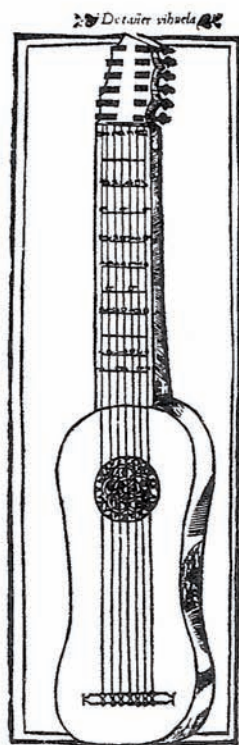
1555 – La prima indicazione relativa al posizionamento obliquo del ponticello-cordiera ci viene invece da Juan Bermudo.⁵³ Dalle sue parole, tale accorgimento avrebbe però semplicemente come fine quello di uniformare la lunghezza vibrante delle corde, essendo esse assicurate al

⁵¹ FLETCHER-ROSSING, *op. cit.*, p. 228: essa varia da uno a cinque millimetri per le moderne chitarre acustiche, mentre per quelle elettriche (bassi) può risultare ancora maggiore.

⁵² S. GANASSI, *Lettione seconda, pur della pratica di sonare il violone d'arco da tasti [...]*, [Venezia], presso l'autore, 1543, c. BIIr. Come è noto, un *detuning* iniziale si avverte anche quando le corde vengono pizzicate con un certo vigore. Il primo autore ad avere segnalato questo fenomeno è MERSENNE, *op. cit.* in nota 4, p. 56; riferendosi alle corde del liuto, dice infatti: «il semble qu'elles ont le son un peu plus aigu, lorsqu'on les touche plus fort, quoy qu'il ne soit pas quasi possible d'en distinguer la difference».

⁵³ J. BERMUDO, *Declaración de instrumentos musicales*, Ossuna, Juan de Leon, 1555, c. 108r-v.

razon de Musica. Los tañedores que trastes p^o uieren de poner en algunos destos instrumentos tengan tal auiso, que no solamente los trastes que den de quadrado (segun fue dicho en el capitulo ochenta y dos) pero para quedar perfectos, han de estar los instrumentos de quadrado. Entiendo los instrumentos ser de quadrado: quando todas las cuerdas son de vn tamaño. Si antes de poner las cuerdas en vn instrumento estuuiessen de quadrado la ceja y puente: puestas las dichas cuerdas se perderia. Es manifestto, que mas distancia occupa el nudo, o ligadura de la cuerda sexta por ser gorda: que el de la prima que es delgada. Pues si la ceja y puente de la vihuela estuuiessen de quadrado, como al poner de las cuerdas la sexta, quinta y quarta quedassen mas cortas, que la tercera, segunda, y prima: seguirse ya, no quedar todas las cuerdas de quadrado. El official que la puente pusiere: deve tener consideracion que tanto occupa para mas el nudo de la sexta, que el de la prima: y aquello dara de viaje ala puente. De forma, que puestas las cuerdas queden todas de vn tamaño. Miden se las cuerdas en lo que formā las bozes. Forman las bozes desde las ligaduras hasta la ceja de la vihuela. Todas las cuerdas ternan vna mesma distancia, dando de viaje ala puente el exceso que baze la ligadura de la sexta, al de la prima: porque quanto mas delgada es vna cuerda menos espacio occupa con la ligadura, y assi que daran todas las cuerdas de quadrado, y perfecto el instrumento desta parte. Bien entiendo, que baziendo lo contrario de lo sobredicho no se sentiria la falta por ser pequena, y repartida en todos los trastes: pero esto es lo que pide la perfection de la Musica, y medio cabello de imperfection no quiero consentir en los repartimientos y traza de los instrumentos: porque menos preciando muchas faltas pequenas, que cada vna por si no se siente: viene a ser vna grande muy sensible. Pueden bazer



fol. ex.

¶ Demonſtración de la vihuela de ſiete ordenes que ſe tangen
 todos los ſemitonos eſtando fixos los trastes.

ponticello tramite una legatura. Con riferimento a uno strumento di sei ordini, Bermudo infatti dice (Fig. 6, p. 281):

El official que la puente pusiere: deve tener consyderacion que tanto occupara mas el nudo de la sexta, que el de la prima: y aquello dara de viaje a la puente. De forma, que puestas las cuerdas queden todas de un tamaño.

Il lavorante che monterà il ponticello dovrà tener conto di quanto maggior spazio occuperà il nodo della sesta [corda] rispetto a quello della prima, e di tale quantità spostare [in giù] il ponticello: di modo che, una volta montate, tutte le corde abbiano una medesima lunghezza.

1625 – Mediante un compasso di proporzione, il matematico olandese Adriaan Metius insegna a posizionare i tasti del liuto e della chitarra.⁵⁴ Aggiunge però che dopo tali operazioni

paulum tamen erunt toni versus partem superiorem in manubrio attollendi, idque propter chordarum, quae tonos determinant, crassitiem.

i toni [= tasti] dovranno tuttavia essere spostati un po' verso la parte superiore del manico, e ciò a causa dello spessore delle corde che li determinano.

Si tratta quindi di un'operazione analoga a quella già prescritta da Ganasì. A differenza di quest'ultimo, Metius però la giustifica prendendo in considerazione non il *detuning*, ma la componente dovuta alla inarmonicità della corda.

1851 – Secondo Charles Delezenne, «in certe chitarre» viene effettuata una compensazione del secondo tipo, e cioè inclinando progressivamente i tasti.⁵⁵

1881 – Rosario Alessi, nella sua già citata opera pubblicata a Napoli, afferma che le chitarre e i mandolini «in maggior parte riescono disarmonici». ⁵⁶ E ciò, spiega, per due ragioni:

⁵⁴ A. A. METIUS, *Geometriae practicae pars tertia. Usus circini & regulae proportionalis explicans [...]*, Franeker, Balck, 1625 (opera incorporata in ID., *Arithmeticae libri duo et Geometriae libri VI [...]*, Leiden, Officina Elzeviriana, 1626), p. 265. Tali sue istruzioni verranno riprese, pochi anni dopo, dal matematico inglese William Oughtred: su tale divisione cfr. BARBIERI, *Il mesolabio e il compasso di proporzione: le applicazioni musicali di due strumenti matematici (1558-1675)*, in *Musica, scienze e idee nella Serenissima durante il Seicento*, a cura di F. Passadore e F. Rossi, Venezia, Fondazione Levi, 1996, pp. 201-220: 210-211.

⁵⁵ Cfr. BOUASSE, *Acoustique* cit., p. 131.

⁵⁶ ALESSI, *Sonometro* cit., pp. 79-89.

1. In tali strumenti i fabbricanti pongono il tasto relativo all'ottava esattamente a metà strada tra il ponticello e il capotasto: tale ottava risulterà quindi crescente, sia a causa del *detuning* che dell'inarmonicità. Pur senza mai nominarlo, Alessi prende anche in considerazione il modulo di elasticità, precisando però: «Sebbene nelle corde di chitarra questa alterazione sia meno di quelle di acciaio, pure sempre ci sta, e stante la distensione che soffrono, uguaglia quella delle corde di acciaio».⁵⁷ Per ovviare a tale inconveniente consiglia di effettuare lo stesso tipo di compensazione adottato per il suo sonometro: ciò porta alle sia pur leggere inesattezze già fatte rilevare nel §1, alle quali bisogna aggiungere quella derivante dal fatto che il ponticello – pur venendo abbassato – rimane però parallelo al capotasto (Fig. 7, p. 285).

2. Alessi ricorda inoltre che in detti strumenti i fabbricanti pongono i tasti approssimando il semitono del temperamento equabile al rapporto 18:17 (= 98.95 cents). Tale metodo, già citato da Vincenzo Galilei nel 1582, è infatti di semplice applicazione: la lunghezza di corda vibrante corrispondente a ogni singolo tasto deve essere assunta pari ai 17/18 di quella relativa al tasto che lo precede. Considerata sotto l'aspetto puramente aritmetico, tale approssimazione porta però a una ottava calante di 12.54 cents.⁵⁸

Invece di accorciare la corda di 1/18, Alessi consiglia quindi di aumentare leggermente questo rapporto, portandolo a 1/17.81: tale nuovo semitono sarebbe pari a $1781:1681 = 18:16.989$ (= 100.04 cents), il che porterebbe ad un'ottava praticamente giusta (1200.48 cents).⁵⁹ Egli trascura però di fare osservare che sotto l'aspetto acustico la vecchia regola dei 18:17 produrrebbe migliori risultati, perchè introdurrebbe – e questa volta direttamente in ogni singolo tasto – un fattore compensativo pressochè analogo a quello da lui stesso consigliato al punto 1.

⁵⁷ *Ibid.*, p. 84 (a riguardo del modulo *E*, cfr. anche le pp. 65-67).

⁵⁸ *Ibid.*, p. 79: «Circa la divisione degli intervalli nel manico di detti strumenti si fa comunemente giusta la misura in 18, dividendo, e suddividendo la lunghezza, o distanza tra il capo tasto, e il *Cordiere*. Si è visto di sopra che questa misura è falsa. A questo si aggiunge che i fabbricanti di detti strumenti per lo più, si hanno un modulo ereditato dal loro avo o bisavolo; e che copiandosi, e ricopiandosi, si viene ad alterare. Una tale alterazione si vede ben chiara nella divisione degli intervalli nel manico delle Chitarre, e dei Mandolini».

⁵⁹ Anche in Francia, nel 1836-39, venne proposto un rapporto del genere, pari a 18:16.991 (= 99.88 cents): cfr. BARBIERI, *Il mesolabio* cit., p. 220.

4.2. Violini

Dopo gli strumenti a pizzico, resterebbero ora da esaminare quelli ad arco, la cui fisica delle vibrazioni è stata studiata solo in tempi relativamente recenti. Ricorderò solo:

1. per le note tastate vale evidentemente quanto già detto nel §4.1;
2. nonostante la notevole inarmonicità delle corde con cui vengono armati, i violini – analogamente a tutti gli strumenti le cui vibrazioni sono ‘sostenute’ nel tempo da una fonte eccitatrice ad azione continua, nel nostro caso costituita dall’archetto – presentano una forma d’onda ad andamento sostanzialmente periodico: come Fletcher ha dimostrato nel 1978, ciò è dovuto al fatto che i fenomeni di interazione tra corda e archetto fanno sì che tutti gli armonici vengano riportati a multipli esatti del fondamentale;⁶⁰
3. studi condotti in questi ultimi decenni hanno comunque potuto accertare la presenza di particolari tipi di aperiodicità delle vibrazioni dovuti alla sola rigidità delle corde (e non al fenomeno dell’inarmonicità);⁶¹ uno di essi è il *flyback-jitter*, che però – in seguito a una analisi condotta nel 1981 e contrariamente a quanto comunemente ritenuto – nel violino è risultato essere sempre al di sotto del potere di discriminazione dell’orecchio umano.⁶²

⁶⁰ N. H. FLETCHER, *Mode locking in nonlinear excited inharmonic oscillators*, «The Journal of the acoustical society of America», LXIV, 1978, pp. 1566-1569: 1568.

⁶¹ Cfr. FLETCHER-ROSSING, *op. cit.*, pp. 244-245.

⁶² Cfr. M. E. MCINTYRE-R. T. SCHUMACHER-J. WOODHOUSE, *Aperiodicity in bowed-string motion*, «Acustica», XLIX, 1981, pp. 13-32: 17.

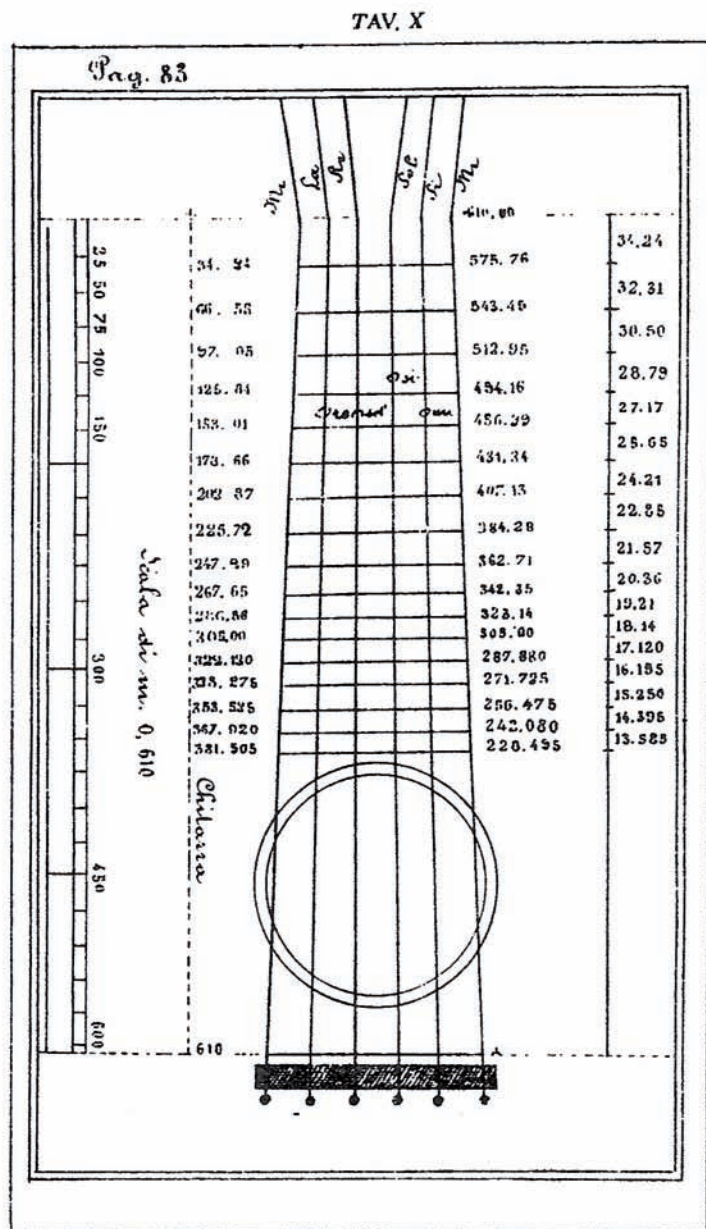


Fig. 7
chitarra.

Da Alessi, 1881. Proposta di correzione della posizione del ponticello della

APPENDICE DOCUMENTARIA

DOCUMENTO I⁶³

[Dal dossier di Jean-Baptiste Mercadier]

(1) *Notice sur le service et l'ancienneté du S.^r Mercadier [...]* [Autografo del 1805, datato «Foix, 1^{er} Brumaire an XIII». Inizia così:]

Je soussigné Jean-Baptiste Mercadier naquis le 17 avril 1750 à Belestia autrefois dans le Languedoc et aujourd'hui dans le Département de l'Ariège; / Après avoir fait mes classes chez les jésuites à Pamiers, ma philosophie à l'université de Toulouse, un cours de mathématiques au collège royal de la même ville et fréquenté quelque temps l'academie de peinture, je fus / Le 1^{er} janvier 1770, inspecteur des travaux publics de la ci-devant province du Languedoc, chargé de quelques constructions et notamment de celle du pont à trois arches en pierre sur la rivière du Douctouire, entre Pamiers et Mirepoix, route de Bayonne en Italie n° 125 [...]

(2) *Notice des ouvrages faits par J. B. Mercadier, Ingénieur en chef des ponts & chaussées* [Autografo del 1805, datato «1^{er} Brumaire an XIII».]

[...] *Acoustique*. Traité sur les rapports des sons, remis le 22 juillet 1783 par M. Dalember à M. de Condorcet. Cet ouvrage renferme des expériences neuves qui furent répétées le 4 décembre de la même année par la Société des Sciences de Montpellier.

Mémoire sur la fixation du son et sur les divisions d'un monocorde pour l'accord des instruments de musique, donné à la même Société le 16 X^{bre} 1784.

Musique. Sonates à violon seul et basse, présentées en 1786 à M. de Narbonne président des états du Languedoc [= Arthur Richard Dillon, archeveque et primat de Narbonne] avec nouvelle manière de chiffrer la basse continue [...]

[Alla fine, sottolineato:] On ne comprend pas ici une infinité de petits mémoires sur différens sujets et des pièces de musique à petite symphonie ou à grand orchestre.

[La lista contiene inoltre scritti sulle seguenti discipline: «physique, hydrographie, astronomie, travaux de mer, topographie, système metrique, météreologie, cosmogonie, hydrostatique, chemie».]

⁶³ Paris, Archives Nationales, Ms. F14.2281/2: *Dossier individuel des ingénieurs: Jean-Baptiste Mercadier*. Il fascicolo contiene vari documenti manoscritti, di cui riporto alcuni estratti.

(3) [Lettera di Mercadier al «Directeur General des Ponts et Chaussées, Monsieur le Comte de Molé, Pair de France», non datata, ma ricevuta il 22 settembre 1815. In essa Mercadier chiede di non essere mandato in pensione, aggiungendo:]

C'est sur la ferme persuasion qu'en m'acquittant de mes devoirs, je ne serois pas privé de ma place, que j'ai fait de grandes dépenses pour avoir des bureaux convenables dans une ville où les logemens sont rares, et que je me suis établi avec une créole dont j'ai huit enfans en bas age. J'ai enfin sacrifié la plus grande partie de ma fortune pendant plus de trente ans pour faire des recherches sur les travaux maritimes et la navigation à la suite de la comission que j'avois reçue à ce sujet sous Louis XVI, des états de Languedoc. Je n'ai rien épargné pour voyager, pour me procurer des livres anciens et modernes, pour faire des observations, des expériences et des calculs. Je me suis frayé des routes nouvelles, et je ne suis tombé sur aucune équation, quelque élevée quelle fût, dont je n'aye donné la résolution [...]

[Continua dicendo che sta ultimando il suo *opus magnum* sui «travaux de mer» e aggiungendo che è preoccupato per lo stato delle sue finanze:]

Néanmoins, Monsieur le Comte, je ne me décourage point. Je travaillerai avec plus d'activité que jamais. Je passerai une année ici [a Foix] pour terminer mes ouvrages, et j'irai passer ensuite quelques années à Paris pour le [sic] faire imprimer, et pour faire graver les planches qu'il renferme [...]

[A tale riguardo chiede un contributo di 40.000 franchi per completare il lavoro, per pagare copisti e disegnatori, e per effettuare ulteriori esperimenti.]

(4) [Lettera come sopra, datata Foix, 20 dicembre 1815. Dopo quarantacinque anni di servizio, Mercadier dice di essere stato messo «en retraite»; il suo successore è appena arrivato. Con disappunto osserva:]

Je jouissais, Monsieur le Comte, d'une santé robuste, et j'étois fort actif lorsque j'ai été atteint tout à coup d'une maladie douloureuse, qui heureusement ne sera que passagère d'après l'avis des mediciens. Elle ne m'a pas donné la moindre fièvre, elle m'a laissé la liberté de l'esprit, et par conséquent je pouvois fort bien continuer le service [...]

[Aggiunge di essere il contribuente più tassato di Foix e di trovarsi in difficoltà a causa delle sue idee politiche.]

(5) [Lettera del Prefetto del Département de l'Ariège, datata Foix, 22 marzo 1816, con la quale si comunica che Mercadier è deceduto il «14 janvier 1816, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du soir».]

DOCUMENTO II⁶⁴

[c. 84r] Nous Commissaires nommés par la Societé Royale des sciences pour faire la vérification de plusieurs expériences sur le rapport des sons annoncées par Mr. Mercadier, fort avantageusement connu dans la musique par le Nouveau Système qu'il en publia en 1776, avons procédé à la ditte vérification le 25 du mois dernier en présence de plusieurs personnes connues par la justesse de leur oreille, et leurs talens pour la musique; et Mr. Mercadier a fait ses expériences dans l'ordre suivant.

1°. Sur une planche de bois fort unie il a tendu une corde de leton d'environ trente pouces de long portée sur deux chevalets éloignés de deux pieds l'un de l'autre, en sorte que la partie sonore de la corde n'avoit que deux pieds de longueur. Au moyen d'un troisième chevalet il a divisé cette corde en deux parties dont l'une étoit double de l'autre, et nous avons pincé ces deux parties dans le même temps: l'intervalle qui en a résulté et qui devoit être une octave juste, s'est trouvé très faux suivant le jugement qu'en ont porté tous les auditeurs. Le son grave étoit fort sensiblement trop bas relativement au son aigu et il a fallu l'élever pour satisfaire leur oreille.

2°. Mr. Mercadier a divisé la ditte corde en deux parties dont l'une étoit les deux tiers de l'autre pour avoir la quinte; puis en deux parties dont la première étoit les trois quarts de la seconde pour avoir la quarte; puis en deux parties dont la plus petite étoit les quatre cinquièmes de la plus grande pour avoir la tierce majeure, et ainsi de suite pour avoir toutes les autres consonnances directes, ou renversées selon les rapports reçus. Le son grave de chacun de ces intervalles s'est trouvé constamment trop bas par rapport au son aigu, et il a fallu le hausser pour rendre la consonnance juste.

3°. La ditte corde a été divisée dans le rapport de un à trois, de 1 à 4, et de 1 à 5, &c. et les intervalles de douzième, de double octave, de disseptième majeure, &c. qui en ont résulté, ont été beaucoup plus faux que les intervalles simples que nous avons eus en premier lieu.

4°. Mr. Mercadier a tendu une grosse corde de laitton d'environ neuf pieds de long sur une solive de bois bien dressée. Il a fait porter une extrémité de cette corde sur un premier chevalet à la distance de six pouces, duquel il en a posé un second, et il a monté la corde jusques à ce que la partie des six pouces comprise entre ces deux chevalets a rendu le *Ré*, quarte au dessus d'un son produit par un instrument d'acier, appelé *Diappason* et dont on se sert pour donner le *Là* de la Comédie Italienne. Il a mis ensuite un troisième chevalet successivement à la distance d'un pied, de deux pieds, de quatre pieds, et de huit pieds du second chevalet, pour avoir l'octave, la double octave, la triple et la quadruple octave, au

⁶⁴ Montpellier, Archives de l'Hérault, Ms. 131, cc. 84r-85r: rapporto dei commissari dell'Accademia delle scienze di Montpellier riguardante le esperienze di Jean-Baptiste Mercadier, 4 dicembre 1783.

dessous du premier *Ré*, et il a fallu raccourcir la partie d'un pied d'environ une ligne trois quarts; la partie de deux pieds d'environ quatre lignes; et les parties de quatre, et de huit pieds d'environ treize, et vingt sept lignes pour accorder les sons qu'elles rendoient avec celui de la petite partie. [c. 84v]

5°. Il a repeté plusieurs fois la même expérience en detendant un peu la corde: à chaque fois les racourcissements qu'il falloit faire pour les grandes parties de la corde que nous comparions à la petite de six pouces devenoient plus grandes à mesure que la corde étoit moins tendue, en sorte que lorsque le son *Ré* que rendoit la petite partie en premier lieu a été porté à une quinte plus bas, c'est à dire au *Sol*, ces racourcissements ont à peu près doublé.

6°. Il a monté à l'unisson deux cordes de léton égales en grosseur et inegales en longueur: une des moitiés de la plus courte a donné un son un peu plus aigu qu'une des moitiés de la plus longue.

7°. Il a aussi monté à l'unisson deux cordes de même matière égales en longueur et inégales en grosseur: une des moitiés de la plus grosse a donné un son moins aigu que celui d'une moitié de l'autre.

8°. Il a tendu à l'unisson deux cordes de létton de même grosseur et de même longueur. Il a divisé l'une de ces cordes en deux parties égales en appuyant un bout de plume sur le point de milieu et en pinçant une de ces deux motiés, il a eu l'harmonique $1/2$. Nous l'avons comparé au son plein de la moitié de l'autre corde, et nous avons trouvé qu'il en rendoit l'unisson. Il en a été de même de l'harmonique et du son plein de chacune des trois aliquotes suivantes, que nous avons comparés.

9°. Mr. Mercadier a divisé une corde tendue de léton de deux pieds deux lignes de long en deux parties dans le rapport de 64 à 81 pour avoir le diton ou tierce majeure dissonante des Grecs, et cet intervalle a paru très discordant.

10°. Il a donné une tension égale à deux cordes de létton égales en grosseur et dont l'une étoit égale à une partie aliquote de l'autre, il a divisé la plus grande en parties égales à la petite par des très petits morceaux de papier bleu qu'il a mis sur chaque point de division. Il a placé ensuite de semblables morceaux de papier blanc indifféremment entre les divisions: en pinçant le petite corde, tous les papiers blancs qui étoient sur l'autre corde sont tombés et les bleus ont resté. C'est de ce moyen que l'Académie Royale des sciences de Paris se sert pour éprouver la théorie des sons harmoniques de Mr. Sauveur.

11°. Mr. Mercadier a fait une expérience à peu près semblable sur deux cordes égales en grosseur et également tendues, dont l'une n'étoit pas multiple ou sousmultiple de l'autre, mais seulement avoit avec elle une commune mesure. Il a divisé l'une quelconque de ces deux cordes en parties égales à la plus grande mesure qui leur étoit commune au moyen de petits papiers bleus entre lesquels il en a mis des blancs: en pinçant l'autre corde, les papiers bleus ont resté et les blancs ont été renversés.

12°. A la place des cordes pincées dans ces deux dernières expériences nous en avons pincé d'autres qui en differoient par la grosseur ou la longueur, mais

qui en rendoient l'unisson et les mêmes choses sont arrivées, c'est à dire que les papiers blancs sont tombés et non pas les bleus.

Mr. Mercadier conclut de toutes ces expériences.

1°. Que les rapports des consonnances par les longueurs des cordes sont plus petits qu'on ne l'a crû jusques icy. [c. 85r]

2°. Que ces rapports sont variables et qu'à mesure que les cordes sont plus tendues ils approchent davantage de ceux de Zarlin, qui leur servent de limite.

3°. Que les rapports de Zarlin sont les seuls qu'on puisse admettre dans la théorie de la musique.

4°. Que les vibrations d'une corde sonore ne parviennent pas tout à fait à ses extrémités et qu'il se forme à ces extrémités des charnières ou noeuds qui servent d'origine aux vibrations et qui raccourcissent la corde sonore: ce qu'il prouve parce que sans cela il arriveroit que des unissons seroient produits par des vibrations qui ne seroient pas isochrones entre elles, ou que des vibrations isochrones entr'elles produiroient des sons qui ne seroient pas à l'unisson.

5°. Que les rapports des consonnances selon Zarlin sont vrais relativement aux vibrations des cordes en temps égaux.

6°. Que les premiers harmoniques d'une corde sont trop aigus pour former des consonnances justes avec le son plein de la corde.

7°. Que le diton, ou la tierce majeure des Grecs est un intervalle discordant.

8°. Que si plusieurs cordes sonores sont égales en tout, excepté en longueur et que la plus petite soit une partie aliquote de chacune des autres, l'orsque cette petite est pincée, toutes les autres fremissent et se divisent en parties égales à la corde pincée.

9°. Que deux cordes aussi égales en tout excepté en longueur, étant commensurables entr'elles, si on pince l'une, l'autre se divise en parties égales à la plus grande mesure qui leur est commune.

10°. Q'une corde qui résonne rends des harmoniques, quoique d'ordinaire on ne les entend pas.

11°. Que si dans la serie du son plein et des harmoniques d'une corde il y a des sons égaux par leur degré d'élévation à d'autres sons pris dans la serie du son plein et des harmoniques d'une autre corde, l'orsque on en pince une l'autre se divise en parties égales pour rendre le son plus grave commun aux deux series quelles que soient les longueurs, les grosseurs et les tensions des deux cordes.

Tous ces objets qui sont fort intéressants, sont détaillés dans deux memoires que l'auteur a présenté à la Société Royale, et où il donne des nouvelles preuves de ses connoissances et de sa sagacité.

Cet exposé nous paroît suffire pour engager la Société Royale à accorder son approbation aux expériences de Mr. Mercadier, qui nous ont paru nouvelles, ainsi que ses memoires qui en renferment les détails et qui en font pressentir l'utilité.

Fait à Montpellier le quatre dexembre mille sept cens quatrevingt trois.

Poitevin Touchy Gaussen

DOCUMENTO III⁶⁵

[c. 145r]

[JEAN-BAPTISTE MERCADIER]

*Mémoire sur la fixation du son
et sur les divisions d'un monocorde
pour l'accord des instrumens de musique.*

Lû le 16 X^{bre} 1784

L'année dernière j'eus l'honneur de présenter à la Société Royale des Sciences, des expériences qui prouvoient que les rapports des sons par les longueurs des cordes étoient variables et toujours plus petits qu'on ne l'avoit cru jusques alors. J'essayai d'expliquer la cause des variations de ces rapports; mais il me manquoit encore de trouver la loi de ces variations pour rendre mes découvertes vraiment utiles. C'est à quoi je me suis occupé cette année. J'ai soumis au calcul des phénomènes qui parvinrent fort bizzarres, et j'ai eu la satisfaction de voir un accord singulier entre les résultats de ma théorie et ceux [c. 145v] que la seule observation m'avoit donné. J'en ai tiré un moyen pour fixer un *a mi* la donné sur une corde, et pour la diviser ensuite avec justesse de manière qu'elle donne successivement toutes les notes d'une partition suivant un système quelconque d'accord. On sait les difficultés qu'on a trouvées jusqu'à présent pour avoir un son fixe. J'ai tâché de les diminuer, et j'ai cherché pour cela des moyens plus pratiques que ceux qui avoient été proposés.

Quant aux divisions du monocorde, on n'a pas douté pendant long tems qu'on ne fût en possession de les trouver à son gré, et les mauvais succès de ceux qui ont voulu en faire usage, n'ont été attribués qu'à la difficulté de faire ces opérations avec précision sans qu'on ait jamais soupçonné un défaut d'exactitude dans [c. 146r] les principes. La longueur des calculs nécessaires pour faire ces divisions est la cause que je n'ai pas encore achevé un mémoire considérable que j'ai fort avancé sur cette matière. Je me contenterai, dans ce moment, de donner les formules algébriques par lesquelles on peut trouver un son fixe et les divisions dont il s'agit.

Divisez la corde proposée en deux parties *a*, *b*, la première plus grande que la seconde, qui soient entr'elles dans le rapport d'une consonnance suivant la théorie adoptée jusqu'à présent: il est bon de choisir une consonnance facile à saisir et à accorder par le seul secours de l'oreille, comme l'octave ou la double-octave. Soit *y* la partie qu'il faut retrancher de *a* pour l'accorder avec *b*, et *z* un des noeuds qui existent à chaque extrémité [c. 146v] de la corde, comme je le démontrai l'année dernière dans un mémoire sur les rapports des sons: on aura toujours

⁶⁵ Montpellier, Archives de l'Hérault, Ms. D.134, cc. 145r-147v (memoria letta il 16 dicembre 1784).

$z = by / (a-b)$. La valeur de z est variable à cause de l' y qui est dans le second membre de l'équation; mais l'une et l'autre sont comme D^2/P , en appelant D le diamètre de la corde et P le poids tendant. Or les vibrations étant comme $\sqrt{P/D}$, ou ce qui revient au même, en raison inverse et soudoublée de D^2/P ou de z , il s'ensuit que le nombre de vibrations d'une corde ne variera pas tant que la valeur de D^2/P ou de z sera constante; pourvu que tout ce qui n'entre pas dans la formule, comme la longueur et la matière de la corde, ne change pas. D'un autre côté, la valeur de z peut être déterminée par [c. 147r] celle de y qu'on peut prendre à volonté pour un intervalle quelconque par le moyen du poids tendant ou du diamètre de la corde. Le voilà suffisamment pour fixer un son et le retrouver au besoin lorsqu'on sait accorder l'octave.

Le ton d'une corde m étant fixé, la partie de cette corde dont le son sera avec justesse à un intervalle donné au dessus du son de la corde entière sera

$$n + \frac{2m - 2n}{m} z$$

en nommant z un des noeuds de la corde comme ci-dessus et n la partie de cette corde qui devrait rendre le son désiré selon la théorie commune. Il n'en faut pas davantage pour diviser très exactement un monocorde pour l'accord du clavecin et de tout autre instrument de musique.

Je ne m'étendrai pas pour le présent sur les formules que je viens de donner: il ne seroit pas bien difficile d'en découvrir les principes [c. 147v] d'après ce qui est exposé dans le mémoire sur les rapports des sons. D'ailleurs je développerai soigneusement ces principes dans un autre mémoire dont j'ai déjà parlé, et qui sera accompagné d'un monocorde tout divisé.

Ce que j'ai dit ici suffit pour faire l'application de ma théorie et pour démontrer l'utilité de mes premières expériences qu'on étoit porté à regarder comme plus propres à satisfaire la curiosité qu'à reculer les limites de l'art musical.